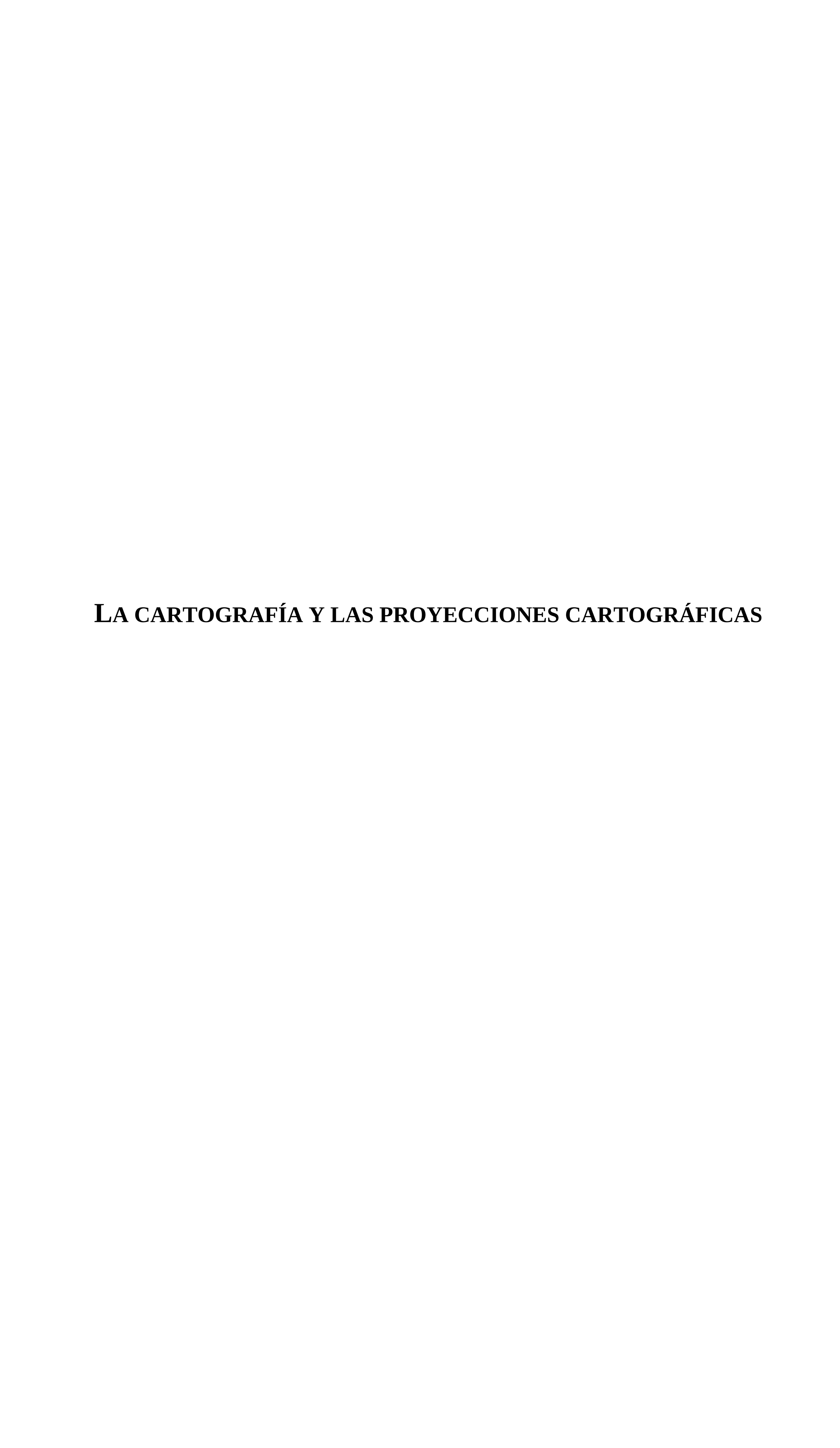
La Cartografía y las Proyecciones Cartográficas

Jacinto Santamaría Peña



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA



LA CARTOGRAFÍA Y LAS PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

MATERIAL DIDÁCTICO

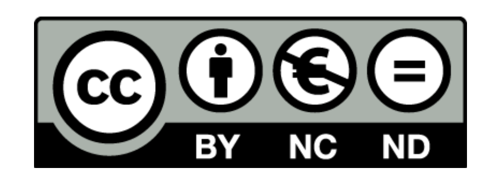
Ingenierías

nº 15

Jacinto Santamaría Peña

La cartografía y las proyecciones cartográficas

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
Servicio de Publicaciones
2011



publicaciones.unirioja.es

E-mail: publicaciones@unirioja.es

ISBN: 978-84-694-0867-4

INTRODUCCION

El objetivo de esta publicación ha sido completar las enseñanzas que, sobre el tema de Cartografía, se imparten normalmente en la Ingenierías Técnicas de ámbito Agronómico de las Universidades españolas. En estas, muchas veces, la Cartografía aparece integrada o enmascarada en otras asignaturas como la Topografía, el Análisis del Territorio, Estudio del Medio Físico, etc. Por ello, a menudo no se profundiza en el fundamento de técnica cartográfica, y éste, no es más que el procedimiento para representar una superficie terrestre en un plano.

Así, el estudio de las Proyecciones Cartográficas, seguramente por falta de tiempo en los Programas docentes, no llega a verse con la profundidad necesaria. Y es que además, para su comprensión, es conveniente tener unos conocimientos previos bien asentados de los Sistemas de Representación y de la Trigonometría, tanto plana como esférica.

Se incluye por tanto en esta publicación un Capítulo dedicado a la Cartografía que pudiéramos llamar "genérica", donde se recuerdan aspectos como las deformaciones que se producen en las representaciones cartográficas, la adopción de escalas, la utilización de símbolos cartográficos, el uso de las curvas de nivel y se introduce el concepto de paralelo y meridiano, como base para definir las coordenadas geográficas.

En un segundo Capítulo, dedicado a la Proyecciones Cartográficas propiamente dichas, se realiza un recorrido individualizado de cada una de ellas, destacando sus principales ventajas e inconvenientes y el principal uso a que se destinan.

Se hace un especial hincapié en la Proyección Universal Transversa de Mertator (UTM), por considerarla fundamental para unos futuros Ingenieros Técnicos. Asimismo, se hace un estudio bastante exhaustivo de la Cuadrícula desarrollada para esta Proyección (CUTM).

Antes de terminar esta breve introducción, simplemente quisiera recordar que se puede ser un buen dibujante de Planos o Mapas, sin saber nada de Transformaciones Cartográficas. Pero el conocimiento y dominio de estas, no sólo nos permitirá realizar buenos planos y mapas del terreno, sino que además sabremos que lo que hacemos lo hacemos bien y con seguridad.

Finalmente, quisiera agradecer la colaboración prestada para realizar esta publicación al Profesor D. Teófilo Sanz Méndez, especialmente por su tozudez y manía por la "perfección". Y aunque modestamente dicha perfección se ha pretendido, rogaría sepan disculpar los errores o incorrecciones que puedan encontrar en estas páginas.

Jacinto Santamaría Peña
Prof. de Expresión Gráfica en la Ingeniería
Universidad de La Rioja

CAPÍTULO I

LA CARTOGRAFÍA

CARTOGRAFÍA

1. Generalidades

La Cartografía es la ciencia que estudia los distintos sistemas o métodos para representar sobre un plano una parte o la totalidad de la superficie terrestre, de forma que las deformaciones que se producen sean conocidas y se mantengan dentro de ciertos límites o condiciones, que dependen de las características que en cada caso se pidan a la representación.

Los métodos para representar gráficamente la Tierra sobre un plano o mapa, necesitan de otras ciencias, como la Topografía y la Geodesia, capaces de determinar la situación de los puntos de la superficie terrestre en ciertos sistemas de referencia.

Si la superficie a representar es de pequeña dimensión, puede considerarse ésta confundida con el plano horizontal o tangente al esferoide terrestre en un punto central, sobre el cual se proyectan los puntos singulares determinados mediante instrumentos que miden coordenadas polares horizontales, ángulos y distancias (Teodolitos, taquímetros, etc.).

Si la superficie es de mayores dimensiones, no puede considerarse como un plano, sino como una superficie esférica o elipsoidal convenientemente elegida, a la cual deben referirse las coordenadas medidas utilizando los métodos de la Geodesia y la Topografía.

Se utiliza como superficie de referencia un elipsoide de revolución, cuyo eje es el de rotación terrestre, utilizándose entre otros el internacional de Hayford, que tiene unos parámetros:

Semieje ecuatorial	a = 6.378.388 m
Aplastamiento	• = 1 / 297

Sobre este elipsoide, los puntos determinados en el terreno por sus coordenadas horizontales (acimut y distancia) se refieren a un sistema de coordenadas elipsoidales o geodésicas, también llamadas “geográficas” que son la ***longitud*** y ***latitud***.

Aquí empieza, en el proceso de la representación de la Tierra, el papel de la Cartografía o de los “sistemas de representación cartográfica”, transformando las coordenadas curvilíneas (longitud y latitud), en otras coordenadas planas, rectangulares o polares. Esta transformación cartográfica se ocupa únicamente de la obtención de coordenadas planimétricas.

La tercera dimensión o altitud, se representa utilizando un método de Geometría descriptiva, el “sistema acotado”, que emplea “cotas” y “curvas de nivel” y a veces tintas hipsométricas o sombreados, que nos permiten ver más fácilmente el relieve.

El objeto genérico de la Cartografía consiste en ***reunir y analizar datos y medidas*** de las diversas regiones de la Tierra, y ***representar éstas gráficamente a una escala reducida***, pero de tal modo que todos los elementos y detalles sean claramente visibles.

Un mapa ***es una representación convencional*** de la superficie terrestre, vista desde arriba, a la que se añaden rótulos para la identificación de los detalles más importantes.

Hay mapas en los que se representa un determinado aspecto o elemento, como sucede, por ejemplo, con los mapas pluviométricos, geológicos, demográficos, de vegetación, etc.

Por otra parte, los mapas suelen representar detalles que no son realmente visibles por sí mismos, como, por ejemplo, las fronteras, los meridianos, los paralelos,...

Los mapas no se limitan a representar la superficie de la Tierra. Hay mapas del firmamento, de la Luna..., y también mapas geológicos del subsuelo.

En el estudio y confección de un mapa se pueden considerar las partes siguientes:

La escala
El sistema de proyección utilizado para representar el mapa
Los elementos a representar mediante símbolos (caminos, montañas,...)
La rotulación
El título
El recuadro
Detalles complementarios.

Los mapas pueden clasificarse por su escala y contenido en:

Mapas generales

Mapas topográficos a escala grande, con información general
Mapas cartográficos que representan grandes regiones (atlas)
Mapas del mundo entero (mapamundis)

Mapas especiales

Mapas políticos
Mapas urbanos (planos de población)
Mapas de comunicaciones (carreteras, ferrocarriles,...)
Mapas científicos de diferentes clases.
Mapas económicos y estadísticos
Mapas artísticos y de anuncios o reclamo (propaganda)
Cartas para la navegación marítima y aérea
Mapas catastrales, a gran escala.

2. Deformaciones.

Puesto que el elipsoide de revolución no es una superficie desarrollable, aplicarlo sobre un plano no será posible, y por tanto, la representación plana del mismo se producirá con deformaciones que pueden ser:

lineales
superficiales
angulares

Estas deformaciones se definen para cada punto, teniendo en cuenta el radio terrestre en esa zona.

2.1. Deformaciones lineales.

Si **Δ s** es la longitud de cualquier línea sobre el terreno y **Δ s'** es la longitud en la proyección, se llama módulo de deformación lineal en ese lugar a la relación:

$$K = \frac{\Delta s'}{\Delta s} \cong \frac{proyeccion}{terreno}$$

Una línea se llama ***automecoica*** cuando en todos sus puntos se verifica que K = 1, es decir, que no existe deformación lineal a lo largo de ella.

No deben confundirse los conceptos de proyección y plano o mapa. Entre ellos existe la relación de escala del mapa, bien determinada por:

$$m = \frac{1}{E} = \frac{plano}{proyeccion} \cong \frac{plano}{terreno}$$

Esta fórmula nos da la escala general del mapa y así se dice por ejemplo, que el Mapa Nacional está a escala m = 1 : 50.000, porque 1 metro del plano representa 50.000 metros en la proyección, en el elipsoide o terreno, ya que K es siempre próximo a 1. Se debe tener en cuenta que dicha relación o escala se establece entre elementos homólogos automecoicos. Fuera de ello, la escala es variable para cada punto y adquiere un carácter de escala local, definida por la relación:

$$m_l = \frac{plano}{terreno} = \frac{plano}{proyeccion} \cdot \frac{proyeccion}{terreno} = \frac{1}{E} \cdot K$$

Ejemplo.

En un punto de coordenadas UTM: X = 498.340 m Y = 4.492.740 m correspondiente al centro de una hoja de escala general m = 1: 50.000 se ha determinado el módulo de deformación lineal K = 0.9996 que se supone constante en cualquier dirección.

¿Cuál es la escala local en las proximidades de dicho punto?

$$m = \frac{1}{\frac{50.000}{0,9996}} = \frac{1}{50020}$$

Este valor puede considerarse constante para toda la hoja, pues la variación de K es muy pequeña en el área de la misma.

Normalmente, en la resolución gráfica de problemas sobre el mapa no será necesario determinar la escala local, pues el error que se comete al trabajar con la escala general es seguramente inferior a la apreciación gráfica (algunas décimas de milímetro).

2.2. Deformaciones superficiales.

Las medidas superficiales también sufren deformaciones, llamándose módulo de deformación superficial a la relación:

$$\sigma = \frac{\Delta S'}{\Delta S}$$

donde ΔS' y ΔS son elementos de superficie homólogos en la proyección y sobre el terreno o superficie de referencia (elipsoide)

Las proyecciones en las cuales $\sigma = 1$ en todos sus puntos, se llaman ***equivalentes***.

2.3. Deformaciones angulares.

A dos elementos lineales que sobre la superficie terrestre o de referencia formen un ángulo α les corresponde en la proyección otros dos elementos que formen un ángulo α' en general distinto.

La diferencia $\alpha' - \alpha$ se llama deformación angular.

En los sistemas llamados ***conformes*** ($\alpha' - \alpha = 0$), las proyecciones transforman las figuras en otras semejantes, conservando los ángulos y la razón entre los elementos lineales homólogos en cada figura elemental. Como consecuencia, en cada punto, el módulo de deformación lineal es constante, cualquiera que sea la dirección que se considere.

Los sistemas conformes son los más utilizados. La proyección U.T.M. y Lambert - Tissot son conformes.

3. Escalas.

Un mapa es una representación convencional de la superficie de la Tierra.

Toda representación, como toda imagen, está en una cierta relación de tamaño con el objeto representado. Esta proporción es la que se llama **escala**.

Considerando dos puntos A y B del elipsoide y sus homólogos a y b en el plano. Se denomina por definición escala de la representación a la relación: $e = \frac{ab}{AB}$

AB es la longitud de la línea geodésica que une los dos puntos sobre el elipsoide
ab es la longitud que une los dos puntos sobre el plano.

3.1. Formas de indicar la escala.

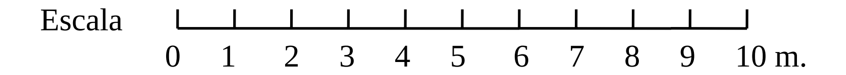
1.- *Escala numérica* o fracción, representa la relación entre la longitud de una línea en el mapa y la correspondiente en el terreno en forma de quebrado, con la unidad por numerador

Escala 1 : 50.000

2.- *Escala centímetro por kilómetros*, que indica el número de kilómetros del terreno que corresponden a un centímetro del mapa

Escala 1 cm por 1 km

3.- *Escala gráfica*, que representa las distancias en el terreno sobre una línea graduada. Esta escala sirve siempre, aunque el mapa se reproduce (amplíe o reduzca) por métodos fotográficos.



3.2. Cambio de escala.

Una de las operaciones más corrientes en Cartografía, es el cambio de escala para reducir o ampliar mapas. En la ampliaciones los errores se harán más grandes.

Se puede hacer **fotográficamente** con cámaras especiales. Hay que tener en cuenta que las copias fotográficas resultan a veces más deformadas en una dirección que en otra.

Para cambiar de escala mapas no muy complicados, se puede usar el **pantógrafo** (hoy poco usado), que es un instrumento fundado en el principio del paralelogramo articulado. Dan mejor resultado en las reducciones que en ampliaciones.

Si no se dispone de ampliador fotográfico ni de pantógrafo, se puede recurrir al método de la **cuadrícula**. El inconveniente es que hay que dibujar a mano.

También se puede aplicar un cambio de escala por medio de **prismas o lentes** que reflejan la imagen del mapa directamente sobre el papel de dibujo, y la escala se varía con solo regular la distancia entre el objeto y la imagen. El más sencillo de todos estos aparatos es la ***cámara clara***. La imagen producida por una cámara clara varía de posición si no se mantiene el ojo exactamente en el mismo sitio mientras se está dibujando la copia.

Actualmente, con los programas informáticos de C.A.D. (Diseño Asistido por Ordenador) o C.A.C. (Cartografía Asistida por Ordenador), si se tiene un mapa o plano digitalizado, sacar por impresora a distintas escalas no es ningún problema. Incluso si se tiene el plano como una imagen, también podemos ampliarlo o reducirlo a escala, teniendo una longitud medida de referencia y cuidando especialmente la resolución final (dpi = puntos por pulgada) en la impresión.

4. Símbolos cartográficos.

Para dibujar cualquier objeto de la realidad se prescinde siempre de detalles poco importantes, que se eliminan, haciendo una selección más o menos acertada de lo que se representa.

En los mapas hay una simplificación de dibujo, que se denomina **generalización** y es más intensa cuanto menor sea la escala.

La *generalización* no es suficiente para solucionar los problemas que la representación cartográfica presenta, porque se llega a límites imposibles de rebasar, impuestos por la escala.

Por ejemplo, una carretera de 5 m de anchura, tiene en un mapa a escala 1:5.000 una separación de 1 mm, pero a escala 1:50.000 la distancia entre sus bordes sería de 0,1 mm y no es posible dibujarlos sin que se confundan. Igualmente, un transformador cuadrado de 2 m de lado es ya a escala 1:5.000 un cuadrado de sólo 0,4 mm de lado, lo que marca un límite al dibujo.

En estos casos hay que emplear los llamados "**símbolos**", que son dibujos semejantes al objeto, pero que ya no lo representan a escala. Otras veces son dibujos de formas variadas, letras o números que indican el accidente según una clave detallada, que debe ser conocida por el lector del plano.

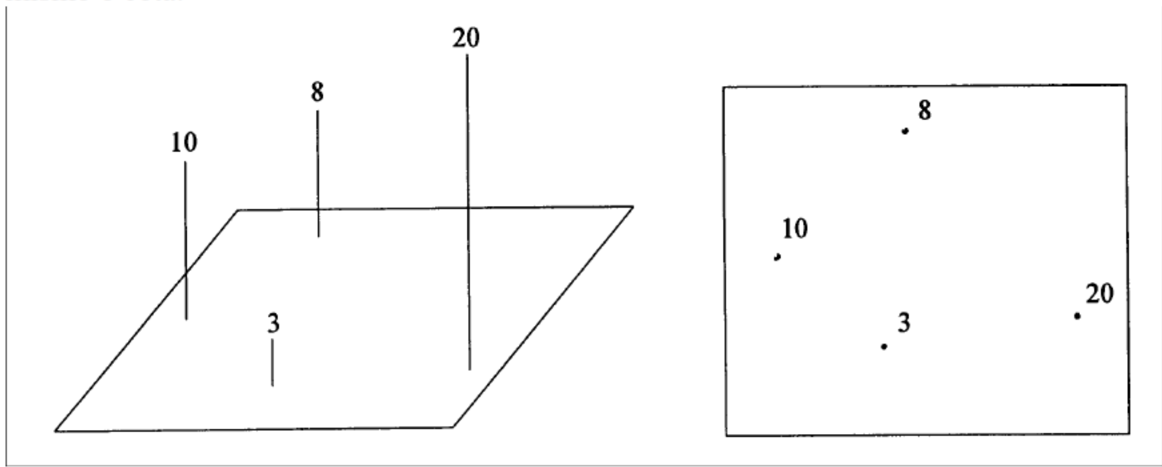
A los símbolos que no son letras ni números se les llama **"signos"**, que son "**convencionales**" cuando hay un acuerdo para establecer su significado, por no corresponder su dibujo a su representación a escala.

En realidad, toda *la representación cartográfica es convencional* debido a la generalización y elección de diversos elementos gráficos (líneas continuas o no, puntos, cuadrados, etc.) que según su color significan una u otra cosa, por ejemplo una línea azul será un río, una roja será una carretera, etc.

Los *signos convencionales,* propiamente dichos, tienen como rasgo distintivo la sustitución de los dibujos generalizados, aunque deben recordarlos en algún aspecto, para que se pueda aprender pronto su significado. Al comparar los que se emplean en distintos mapas topográficos se comprende la existencia de una tendencia a usar los mismos signos para iguales accidentes.

5. Sistemas de representación.

Para la representación sobre el plano de figuras en el espacio existen varios sistemas estudiados en Geometría Descriptiva; proyecciones diédrica, axonométrica y cónica, perspectiva caballera y lineal, etc. De todos, el único adecuado para las superficies topográficas es el llamado de "*planos acotados*", en el cual cada punto de la superficie puede representarse por su proyección sobre el plano del cuadro y por su altura sobre el mismo o cota.



En el sistema de planos acotados la representación se reduce a un conjunto de puntos con su cota cada uno, teniendo imprecisión si se toman pocos puntos y dificultad de lectura si se toman muchos. Una simplificación se logra uniendo con una curva todos los puntos de la misma cota, para algunos valores de la misma. El dibujo queda más claro y se reduce a unas curvas, llamadas curvas de nivel y a unos puntos aislados, cuya cota no es la de esas curvas.

El resultado es el mismo que si la superficie que se quiere representar se cortase por unos planos horizontales y las secciones producidas se proyectasen sobre el plano del cuadro y se añadiese la cota correspondiente.

Las cotas de la curvas de nivel suelen ser todos los números múltiplos de uno dado, es decir, que los planos horizontales sucesivos equidistan entre sí.

5.1. Dibujo de curvas de nivel.

Cuando se conoce la posición planimétrica y la cota de una serie de puntos, a partir de estos datos es posible dibujar las curvas de nivel que representan el relieve del terreno. La aplicación más inmediata se presenta cuando los puntos proceden de un levantamiento de topografía clásica.

5.2. Representación de la recta.

La representación de una recta es también una recta, excepto si la recta es vertical (perpendicular al plano de proyección). En este caso, es un punto.

Si la recta es paralela al plano de proyección todos sus puntos tienen la misma cota.

5.3. Representación del plano.

El plano es la superficie más sencilla, sus curvas de nivel son rectas horizontales. Además como estas rectas son secciones de un plano producidas por planos equidistantes, serán rectas equidistantes que conservan esa propiedad en la proyección.

Para que una recta esté contenida en un plano es necesario que estén dos de sus puntos en el plano.

Hay dos tipos particulares de planos: los verticales en los que los puntos se proyectan en una recta, y los horizontales, con la misma cota para todos sus puntos.

5.4. Representación de superficies geométricas.

Es útil conocer el aspecto que tienen las superficies geométricas, ya que las superficies topográficas pueden serles semejantes, al menos parcialmente.

Las superficies más sencillas formadas por planos son las prismáticas y las piramidales. Sus curvas de nivel son segmentos rectilíneos equidistantes y las aristas son rectas que unen los extremos de esos segmentos.

Las superficies geométricas curvas tienen como isohipsas curvas geométricas, tales como circunferencias o elipses.

5.5. Representación de superficies topográficas.

Las superficies topográficas o del terreno no tienen definición geométrica; en principio son totalmente irregulares, pero esta irregularidad está sometida a un conjunto flexible de normas, que obedecen al tipo de roca que aparece en el terreno, al ciclo erosivo y de sedimentación que ha actuado sobre él y la tectónica externa.

Existe un tipo de terreno considerado regular, con rocas medianamente permeables y erosionables, con fenómenos erosivos típicos de un clima templado y con escasa influencia de la tectónica, en el que las superficies, y por tanto la forma de las curvas de nivel siguen unas reglas fácilmente comprobables. Pero hay muchos casos en que las anteriores condiciones no existen y las formas de las isohipsas varían notablemente.

5.5.1. **Leyes generales**, que pueden tener excepciones:

1.- Las cotas de curvas sucesivas son números uniformemente crecientes o decrecientes.
2.- Dos curvas de nivel no pueden cortarse ni coincidir.
(excepción: acantilados, puntos de collado, cornisas..)
3.- Las curvas de nivel cerradas tienen cota mayor que las que las rodean.
(excepción: depresiones cerradas, hoyas, pozos,..)
4.- Todas las curvas de nivel son cerradas si se considera un mapa completo (isla, continente); en un mapa parcial (hoja) las curvas no cerradas tendrán sus extremos en el marco.
5.- El número de extremos de curva cortados por el borde debe ser par.

5.5.2. **Equidistancia**.

La distancia entre los planos correspondientes a las curvas de nivel, que es constante, se llama "*equidistancia*".

Esta equidistancia suele ser un número múltiplo o divisor de 10, como 0,5 m, 1m, 2.5 m, 5m, 10 m, 20 m, 40m, 50 m, 100m, 200 m, etc. y su elección se hace teniendo en cuenta la escala del mapa, y si es posible, la naturaleza del terreno. Por ejemplo para un terreno en el que las pendientes sean del 1 por 100, en escala 1:10.000 una equidistancia de 1 m supondría curvas de nivel separadas entre sí 100 m en el terreno, o sea, 10 mm en el mapa; pero si el terreno alcanza una pendiente del 10 por 100, la separación en el plano llega a ser de 1 mm; esto indica que en general esa equidistancia es demasiado pequeña. En cambio a escala 1:1.000 la separación entre las curvas en los mismos casos es de 100 mm y 10 mm, que dan un margen suficiente para el dibujo.

En general, debe evitarse que dos curvas de nivel sucesivas se encuentren a menos de 0.5 mm. una de otra.

5.5.3. **Curvas maestras e intercaladas**.

Con el objeto de no entorpecer la lectura del mapa, las curvas de nivel se rotulan con su cota correspondiente sólo en puntos alejados entre sí. Para facilitar la determinación de la cota en cualquier punto, se dibujan más gruesas algunas curvas, que aparecen cada 4 ó 5 curvas, éstas curvas son las directoras o maestras.

Por ejemplo, en mapas a escala 1:25.000 las curvas de nivel maestras son las múltiplo de 100 m.

Cuando el terreno tiene poca pendiente, su forma queda mal definida por las curvas de equidistancia normal y se recurre a curvas de menor equidistancia (mitad o cuarta parte..), son las curvas intercaladas y se representan a trazos.

5.5.4. Llanuras, elevaciones y depresiones.

Una clasificación primaria de las formas del terreno permite distinguir estos tres grupos de zonas: llanuras, elevaciones y depresiones.

Las llanuras no lo son nunca exactamente, siempre hay alguna curva de nivel. Es decir, existe una pendiente mínima.

En las zonas de elevación más elementales, el terreno se halla por encima de una llanura. Las curvas de nivel son cerradas y cada una envuelve a otra de cota mayor.

En las depresiones el terreno está por debajo de la llanura. Las isohipsas son cerradas también, pero envuelve cada una a otra de cota menor.

5.5.5. Orientación de un mapa.

Para utilizar un mapa sobre el terreno, lo primero es localizar el punto donde se encuentra el observador; después hay que colocar el mapa de forma que coincidan su direcciones con las correspondientes del terreno. A esta operación se le denomina orientación del mapa.

El caso más sencillo se presenta cuando se pueden identificar uno o varios puntos del terreno con los correspondientes del mapa, además del punto de observación. Entonces las rectas que unen esos puntos con el de observación dan direcciones sobre las cuales se colocan las análogas del mapa y el mapa queda orientado.

En otro caso ha de buscarse la dirección Norte - Sur por métodos astronómicos, magnéticos o por observación de indicios en el terreno. La palabra *orientación* alude a la determinación del Este u Oeste del mapa, y es recuerdo de la época en que los mapas llevaban este punto en su parte superior. En la actualidad *orientarse* se refiere a buscar el Norte.

6. PARALELOS Y MERIDIANOS

El principio fundamental de la Cartografía consiste en el establecimiento sobre la superficie de la Tierra de un sistema de coordenadas al que pueda referirse cualquier punto de la misma.

Tenemos las principales direcciones de referencia: Norte, Sur, Este y Oeste.

Los polos se definen como los puntos de intersección del eje de rotación de la Tierra con su superficie.

El ecuador es un círculo, intersección de la Tierra con un plano perpendicular en su punto medio al eje de rotación de la misma.

6.1. Paralelos

Los paralelos son círculos menores paralelos al ecuador.

Entre el ecuador y cada polo hay 90º, cada grado tiene 60' y cada minuto 60".

La longitud del arco de meridiano comprendido entre cada dos paralelos no es igual para todos ellos. Por ser un elipsoide, la curvatura varía más cerca del ecuador que de los polos.

La longitud de 1º de latitud es de 110,51 km cerca del ecuador y de 111,70 km en los polos.

1º de latitud = 111,1312 - 0,5690 cos 2 φ + 0,0012 cos 4 φ (en km), siendo φ la latitud

6.2. Meridianos

Los meridianos son círculos máximos, que pasan por los polos y son perpendiculares al ecuador y los paralelos. Dividen al ecuador y paralelos en 360º.

La longitud de 1º de longitud varía desde 111,29 km en el ecuador, hasta 0 en los polos.

Si suponemos la Tierra esférica, el radio de un paralelo es $r = R \cos \varphi$

Los radios de los paralelos guardan entre sí la misma relación que sus circunferencias

1º de longitud = 1º latitud cos φ

La longitud varía con el coseno de la latitud φ.

6.3. Red de paralelos y meridianos

Una de las primeras tareas para la formación de un mapa es el dibujo de su red de meridianos y paralelos. Esta red constituye el armazón sobre el cual se construye el mapa.

La red de meridianos y paralelos tiene forma distinta según sea el sistema de proyección adoptado y constituye la manifestación más clara de ese sistema.

Así por ejemplo, una red de paralelos y meridianos representados por dos familias de paralelas entre sí y perpendiculares las de una familia y otra, es típica de las proyecciones cilíndricas normales (Mercator), mientras que las cónicas normales se caracterizan porque sus meridianos son rectas concurrentes y sus paralelos circunferencias.

6.4. Determinación de la latitud y de la longitud

Conociendo la latitud y longitud se puede situar cualquier punto sobre la superficie terrestre.

El ecuador es el origen de las latitudes.

El meridiano 0º es el meridiano que pasa por Greenwich (cerca de Londres).

La latitud de un lugar se determina observando las estrellas.

La estrella Polar actual se halla aproximadamente a 1º (azimutal) del polo norte celeste, y la latitud se halla determinando el punto medio entre las culminaciones superior e inferior de la Polar (estrella alfa centauro).

Las longitudes se determinan hallando la hora local por medio del paso de estrellas. Se compara esta hora con la del meridiano de Greenwich, que se conoce en todo momento mediante un cronómetro o tomándola de las señales horarias dadas por radio. La diferencia entre la hora local y la de Greenwich es la longitud, teniendo en cuenta que 1 hora de diferencia corresponde a 15º de longitud. A dicha diferencia hay que sumar o restar, según el caso, la *ecuación de tiempo*, que es la diferencia entre la hora solar observada y la hora media (la del reloj). Antes de la invención del cronómetro era muy difícil determinar la longitud.

Las latitudes se refieren al norte y al sur del ecuador.

Las longitudes se refieren al este y oeste del meridiano de Greenwich y van desde 0º hasta 180º.

Las coordenadas del Observatorio Astronómico de Madrid son:

φ = 40º 24’ 30”00 N λ = 3º 41’ 14”55 O de Green.

Las unidades de medida fundamentales: la milla náutica y el metro.

La milla náutica.

La milla náutica fue en un principio un minuto de latitud; pero como la longitud lineal de un grado de latitud no es constante, resultaba que la milla náutica era más pequeña en el ecuador que en los polos. Para evitar esta confusión se introdujo la milla del Almirantazgo = 1853,18 m que es el valor medio de 1' de latitud.

El sistema métrico decimal.

En el siglo XVIII existía gran confusión entre las diversas unidades de longitud que eran las millas, leguas, toesas,... En la Revolución francesa se adoptó una nueva unidad de longitud aproximadamente igual a 1/40.000.000 de círculo meridiano y se llamó metro.

Dimensiones de la Tierra según Hayford (1909):

Radio de la Tierra en el ecuador: 6.378,38 km.
Radio de la Tierra en los Polos: 6.359,90 km.

Elipticidad (achatamiento) $\frac{a-b}{b} = \frac{1}{297}$
Circunferencia ecuatorial: 40.102,84 km.
Circunferencia meridiana: 40.035,64 km.
Longitud de 1º de latitud en el ecuador: 110.535 km.
Longitud de 1º de latitud en los polos: 111.321 km.
Superficie total de la Tierra (aproximadamente): 510.100.000 km^2
Radio de la esfera de igual volumen: 6.369,55 km. (1º de latitud equivaldría a 111,34 km.)
Radio de la esfera de igual superficie : 6.371 km.

CAPÍTULO II

LAS PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

7. Introducción y tipos de sistemas.

La elección de un sistema de proyección depende de la utilización que ha de hacerse de la carta o del mapa. En muchos casos, bastará con la representación de los detalles geográficos sin excesiva precisión. Puede ser el caso de la representación de planisferios, en que se buscan los contornos de continentes, islas, países, etc.

En general, los mapas han de satisfacer una serie de propiedades geométricas. Así, para la marina y la aviación, en que se navega siguiendo unas líneas llamadas loxodrómicas u ortodrómicas que mantendrán al piloto en el rumbo elegido, la carta o mapa tendrá que conservar los ángulos, o lo que es lo mismo, ser *conforme*.

Los *sistemas que conservan los ángulos*, es decir, las líneas en la esfera forman al cortarse el mismo ángulo que sus representaciones planas, se las llama **conformes** (el ángulo de dos curvas que se cortan es el ángulo que forman sus tangentes). Esta conservación de ángulos vale para cualquier par de curvas. En caso de que no haya igualdad de ángulos, la diferencia existente entre el ángulo real y el del mapa es la **anamorfosis angular**.

Asimismo, estas proyecciones podrían servir para acciones militares en que además, se precisa medir distancias con la máxima precisión para el lanzamiento de proyectiles. A las proyecciones que conservan distancias se les denomina ***aphilácticas***.

Hay sistemas que conservan las distancias en ciertas líneas determinadas llamadas **automecoicas**.

Eso quiere decir que en esas líneas o direcciones la escala es la misma, en cambio no lo es entre dos puntos cualesquiera, existiendo deformaciones que se llaman **anamorfosis lineal**.

Hay sistemas que conservan las distancias a lo largo de direcciones especiales, por ejemplo las que salen de un punto determinado (son llamados **equidistantes**).

El cociente de la escala correspondiente a la distancia entre esos puntos y la escala en las líneas automecoicas no es la unidad, sino un número mayor o menor próximo a la unidad.

Por otra parte, la conservación de superficies es importante para la realización del catastro y todas sus consecuencias fiscales. Las proyecciones que conservan las superficies se les denomina ***equivalentes***.

Los sistemas que conservan la superficie de cualquier figura, se les llama **equivalentes**. Las proyecciones no equivalentes presentan anamorfosis superficial (cociente entre superficie del mapa y superficie real).

A pesar de que en cada caso sería conveniente utilizar proyecciones conformes, aphilácticas o equivalentes, según las necesidades geográficas y cartográficas, en los mapas modernos la proyección más utilizada es la conforme.

No hay proyección que conserve los tres tipos de dimensiones (ángulos, distancias y superficies)

CONFORMES	*Conserva los ángulos*	*(navegación aérea)*
APHILÁCTICAS	*Conserva algunas distancias*	*(acciones militares)*
EQUIVALENTES	*Conserva superficies*	*(realización de catastro)*

8. CLASIFICACIÓN GEOMÉTRICA

Otro aspecto que sirve para clasificar los sistemas depende de la definición geométrica de los distintos sistemas, es decir, de si el paso de la esfera al plano se ha hecho directamente o por intermedio de un cilindro o de un cono. Según este criterio se clasifican en:

8.1. Proyecciones.

Si el paso de la esfera al plano se hace directamente se habla de **proyecciones planas o perspectivas**. Se obtienen proyectando la superficie terrestre sobre un plano, desde un punto que llamaremos vértice de proyección. *(Estereográfica, ortográfica, gnomónica, Mapa Topográfico Nacional...)*

8.2. Desarrollos.

Si hay *paso intermedio* son **desarrollos**. Se obtienen considerando una superficie cónica o cilíndrica tangente o secante a la esfera. Se define en ellos una correspondencia entre los puntos de la esfera y del cono o cilindro, desarrollando después esta superficie. Si el eje del cono o cilindro está en el plano del Ecuador se llaman desarrollos transversos, si coincide con el eje de la Tierra, se llaman directos y si ocupa cualquier otra posición, dará lugar a los desarrollos oblicuos o también llamados horizontales.

Si se pasa de la esfera a un cilindro, que después se desarrolla, se obtiene una *proyección cilíndrica (Mercator, U.T.M.).*

Si es de la esfera a un cono, se trata de una *proyección cónica (Lambert, Bonne...)*

8.3. Analíticos.

Hay otros sistemas de representación, cuyo origen no es geométrico, sino analítico. Entre ellos está el utilizado hace unos años en la Cartografía oficial española.

Como superficie de referencia se utilizará la esfera (R_T= 6.370 km.), o el elipsoide, cuyos radios de curvatura de las secciones principales son:

la gran normal o normal principal $$N = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{1/2}}$$

y el radio de curvatura de la elipse meridiana $$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$$

Los radios de curvatura dependen de la latitud φ y de los parámetros **a** y **e** del elipsoide, por lo que todos los puntos de un paralelo tendrán los mismos radios de curvatura principales.

El radio del paralelo de un punto en la esfera = $R \cos \varphi$ en el elipsoide = $N \cos \varphi$

Un elemento de arco de paralelo en el elipsoide será $ds = N \cos \varphi \, d\lambda$

Un arco *ds* de meridiano sobre la esfera $ds = R \, d\varphi$ en el elipsoide $ds = \rho \, d\varphi$

Dentro de cada grupo se puede distinguir si se trata de una **proyección geométrica** propiamente dicha o de una **representación analítica** y dentro de las geométricas si se ha proyectado según rectas paralelas o rectas concurrentes.

También puede considerarse si el plano en el primer caso es:

* *tangente en un polo a la Tierra* (**polar** o **ecuatorial**)
* *tangente en un punto del ecuador* (**meridiana** o **transversa**)
* o *en un punto distinto de éstos* (**oblicua**)

En el caso de *proyecciones cónicas y cilíndricas* se distinguen las **tangentes** y las **secantes**, según lo sean a la tierra los conos o cilindros auxiliares.

Análogamente, según la *posición de su eje*, se les llama **polares**, **transversas y oblicuas**.

Las *ecuatoriales* y *meridianas* se denominan también **acimutales** y las *oblicuas*, **cenitales**.

PROYECCIONES *Desde un punto (vértice de proyección) se proyecta la superficie terrestre sobre un plano.*

DESARROLLOS *Se obtienen sobre una superficie cónica o cilíndrica tangente o secante a la esfera y luego se desarrolla.*

ANALÍTICOS *No son de origen geométrico, sino analítico.*

PROYECCIONES

ESCENOGRÁFICA. *El vértice de proyección es un punto cualquiera del espacio exterior a la esfera (a distancia finita)*

GNOMÓNICA. *El vértice de proyección coincide con el centro de la esfera.*

ESTEREOGRÁFICA. *El vértice es un punto de la esfera, plano de proyección normal al diámetro que pasa por el vértice.*

ORTOGRÁFICA. *El vértice de proyección está en el infinito, plano de proyección normal a la dirección del vértice.*

A la vez, cada una de ellas puede ser:

ECUATORIAL o directa o polar
MERIDIANA o transversa
HORIZONTAL u oblicua

DESARROLLOS

CILÍNDRICOS

DIRECTOS
Equivalente de LAMBERT
Meridianos automecoicos
Conforme (Carta Mercator)

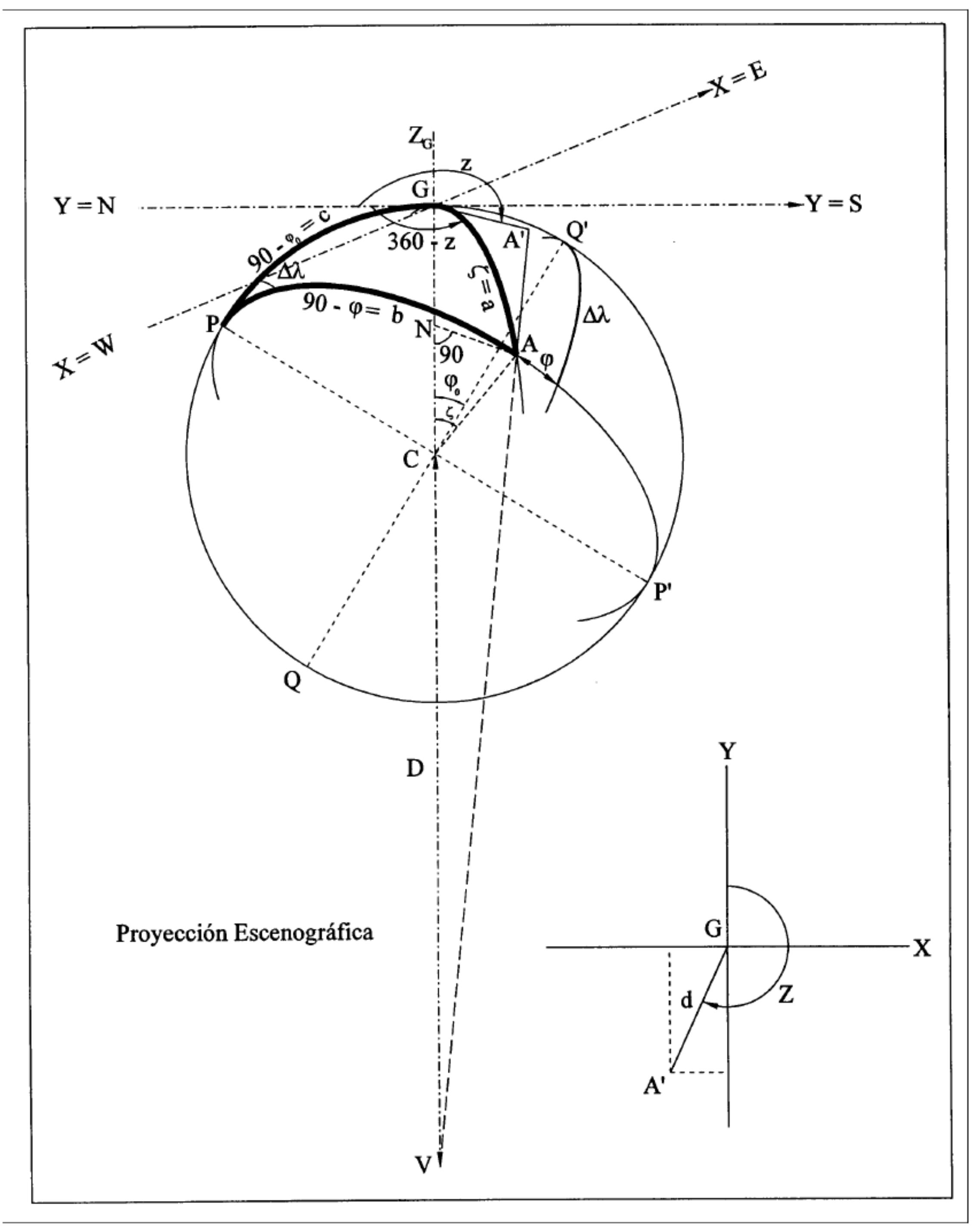
TRANSVERSOS
Conforme de Gauss
U.T.M. (Universal Transversa de Mercator)

CÓNICOS

DIRECTOS
Conforme de Lambert
Conforme de Lambert limitado *(no rigurosamente conforme)*

9. PROYECCIÓN ESCENOGRÁFICA

Analizaremos el caso más general, que corresponde a la perspectiva escenográfica oblicua. A partir de estas fórmulas se obtienen las de las otras proyecciones.



El plano del cuadro va a ser tangente a la esfera en el punto G (corresponde al horizonte de un determinado lugar sobre la Tierra) [ver figura]. Supondremos la figura vista desde fuera de la esfera. En el plano del horizonte consideramos los cuatro puntos cardinales, que determinan un sistema de ejes coordenados. El eje Y será la intersección del meridiano del lugar (plano PGP') con el horizonte y el eje X será la intersección del primer vertical con el mismo plano del horizonte (coincide con el este y oeste).

Un punto cualquiera A de la esfera, determinado por sus coordenadas geográficas $\Delta\lambda$, φ, se proyectará desde el vértice de proyección V en un punto A', cuyas coordenada **x**, **y** vamos a calcular.

Fórmulas de Bessel (trigonometría esférica)

cos a = cos b cos c + sen b sen c cos A
sen a sen B = sen A sen b
sen a cos B = cos b sen c - sen b cos c cos A

En el triángulo esférico PGA, el lado b = 90 - φ c = 90 - φ_o sustituyendo:

$$\cos a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos\Delta\lambda$$
$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen}(360 - z) = \operatorname{sen}\Delta\lambda \cos\varphi$$
$$\operatorname{sen} a \cos(360 - z) = \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi_o - \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi_o \cos\Delta\lambda$$

Los ejes coordenados quedarían según la figura anterior, en la que el punto A', respecto de dichos ejes, tendría por coordenadas:

$$x = d \operatorname{sen} z$$
$$y = d \cos z$$

CG = Radio = 1

En el triángulo CNA CN = R cos a = cos a NA = sen a

En los triángulos semejantes VGA' y VNA, siendo N el punto de intersección de la normal desde A a la recta VG, tenemos:

$$\frac{NA}{GA'} = \frac{\cos a + D}{D + 1} \qquad d = \frac{(D+1)\operatorname{sen} a}{D + \cos a}$$, sustituyendo:

$$X = \frac{(D+1)\operatorname{sen} a}{D + \cos a} \operatorname{sen} z \qquad \operatorname{sen}(360 - z) = \operatorname{sen} z = \frac{\operatorname{sen}\Delta\lambda \cos\varphi}{\operatorname{sen} a}$$

$$\cos a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos \bullet\, \lambda$$

$$X = \frac{(D+1)\operatorname{sen} a}{(D + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos\Delta\lambda)} \times \frac{\operatorname{sen}\Delta\lambda \cos\varphi}{\operatorname{sen} a}$$

$$\boxed{X = \frac{(D+1)(\operatorname{sen}\Delta\lambda \cos\varphi)}{(D + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos\Delta\lambda)}}$$

$$Y = \frac{(D+1)\,\text{sen a}}{D+\cos a}\cos z \qquad \text{sen a} = \frac{\text{sen}\,\varphi\cos\varphi_o - \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o\cos\Delta\lambda}{\cos z}$$

$$\cos a = \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o + \cos\varphi\cos\varphi_o\cos\Delta\lambda$$

$$Y = \frac{(D+1)\,(\text{sen}\,\varphi\cos\varphi_o - \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o\cos\Delta\lambda)}{\cos z\,(D+\text{sen}\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o + \cos\varphi\cos\varphi_o\cos\Delta\lambda)}\cos z$$

$$\boxed{Y = \frac{(D+1)\,(\text{sen}\,\varphi\cos\varphi_o - \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o\cos\Delta\lambda)}{(D+\text{sen}\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o + \cos\varphi\cos\varphi_o\cos\Delta\lambda)}}$$

Estas expresiones de x e y dan las coordenadas escenográficas oblicuas sobre el horizonte de un lugar, cuyo meridiano tomaremos como origen y su latitud es φ_o

PROYECCIÓN ESCENOGRÁFICA OBLICUA (Resumen de fórmulas)**:**

$$X = \frac{(D+1)\,(\text{sen}\,\Delta\lambda\cos\varphi)}{(D+\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o + \cos\varphi\cos\varphi_o\cos\Delta\lambda)}$$

$$Y = \frac{(D+1)\,(\text{sen}\,\varphi\cos\varphi_o - \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o\cos\Delta\lambda)}{(D+\text{sen}\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o + \cos\varphi\cos\varphi_o\cos\Delta\lambda)\}}$$

D = distancia del vértice de proyección al centro de la Tierra
φ = latitud del punto a representar
φ_o = latitud del punto centro de coordenadas perpendicular a proyección
$\Delta\lambda$ = diferencia de longitudes

10. PROYECCIÓN ORTOGRÁFICA

Los puntos de la superficie terrestre se proyectan ortogonalmente sobre un plano que pasa por el centro de la Tierra. Se proyectan desde el infinito.

10.1. PROYECCIÓN ORTOGRÁFICA ECUATORIAL O DIRECTA.

El plano de proyección es el Ecuador. Los meridianos se proyectarán según rectas que pasan por el origen de coordenadas (proyección de los polos) y formando entre sí ángulos iguales a la diferencia de longitudes respectivas. El Ecuador coincide y será una circunferencia cuyo radio tomamos como unidad. Los paralelos son circunferencias concéntricas, sus radios en la representación son iguales a los radios de los paralelos en la Tierra

$X = \text{sen } \Delta\lambda \cos \varphi$ Los meridianos son rectas que pasan por los polos.

$Y = - \cos \varphi \cos \Delta\lambda$ Los paralelos son circunferencias concéntricas, el ecuador es circunferencia.

Ecuación de los meridianos: $\frac{X}{Y} = - \text{tg } \Delta\lambda$ $D = \infty$ $\varphi_o = 90^o$

Ecuación de los paralelos: $X^2 + Y^2 = \cos^2 \varphi$

10.2. PROYECCIÓN ORTOGRÁFICA MERIDIANA O TRANSVERSA

El plano de proyección es un meridiano, a partir del cual contamos las longitudes. El meridiano sobre el que proyectamos (perpendicular al meridiano de Greenwich), coincide con su proyección y será una circunferencia de radio unidad. Los demás meridianos se proyectan según elipses, cuyo eje mayor es siempre la línea de los polos P y P' y cuyo eje menor será: $b = \text{sen } \Delta\lambda$

$X = \text{sen } \Delta\lambda \cos \varphi$ Meridianos, el de proyección es una circunferencia.
Los demás son elipses cuyo eje mayor son los polos y el menor $b = \text{sen } \Delta\lambda$

$Y = \text{sen } \varphi$ Paralelos son rectas paralelas al ecuador. Distantes del ecuador $Y = \text{sen } \varphi$

Ecuación de los meridianos: $Y^2 + \frac{X^2}{\text{sen}^2 \Delta\lambda} = 1$ $D = \infty$ $\varphi_o = 0^o$

Ecuación de los paralelos: $Y = \text{sen } \varphi$

10.3. PROYECCIÓN ORTOGRÁFICA HORIZONTAL U OBLICUA

El plano de proyección no coincide ni con el ecuador, ni con ningún meridiano.

$X = \operatorname{sen} \Delta\lambda \cos \varphi$ — Los meridianos son elipses.

$Y = \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_o - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi_o \cos \Delta\lambda$ — Los paralelos son elipses.

Ecuación de los meridianos:

$$X^2(1-\operatorname{sen}^2 \Delta\lambda \operatorname{sen}^2 \varphi_o) + Y^2 \operatorname{sen} \Delta\lambda + XY \operatorname{sen} \varphi_o \operatorname{sen}^2 \Delta\lambda - \cos^2 \varphi_o \operatorname{sen}^2 \Delta\lambda = 0$$

Ecuación de los paralelos:

$$X^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_o + Y^2 - 2Y\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_o + \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi_o - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi_o = 0$$

11. PROYECCIÓN CENTRAL O GNOMÓNICA

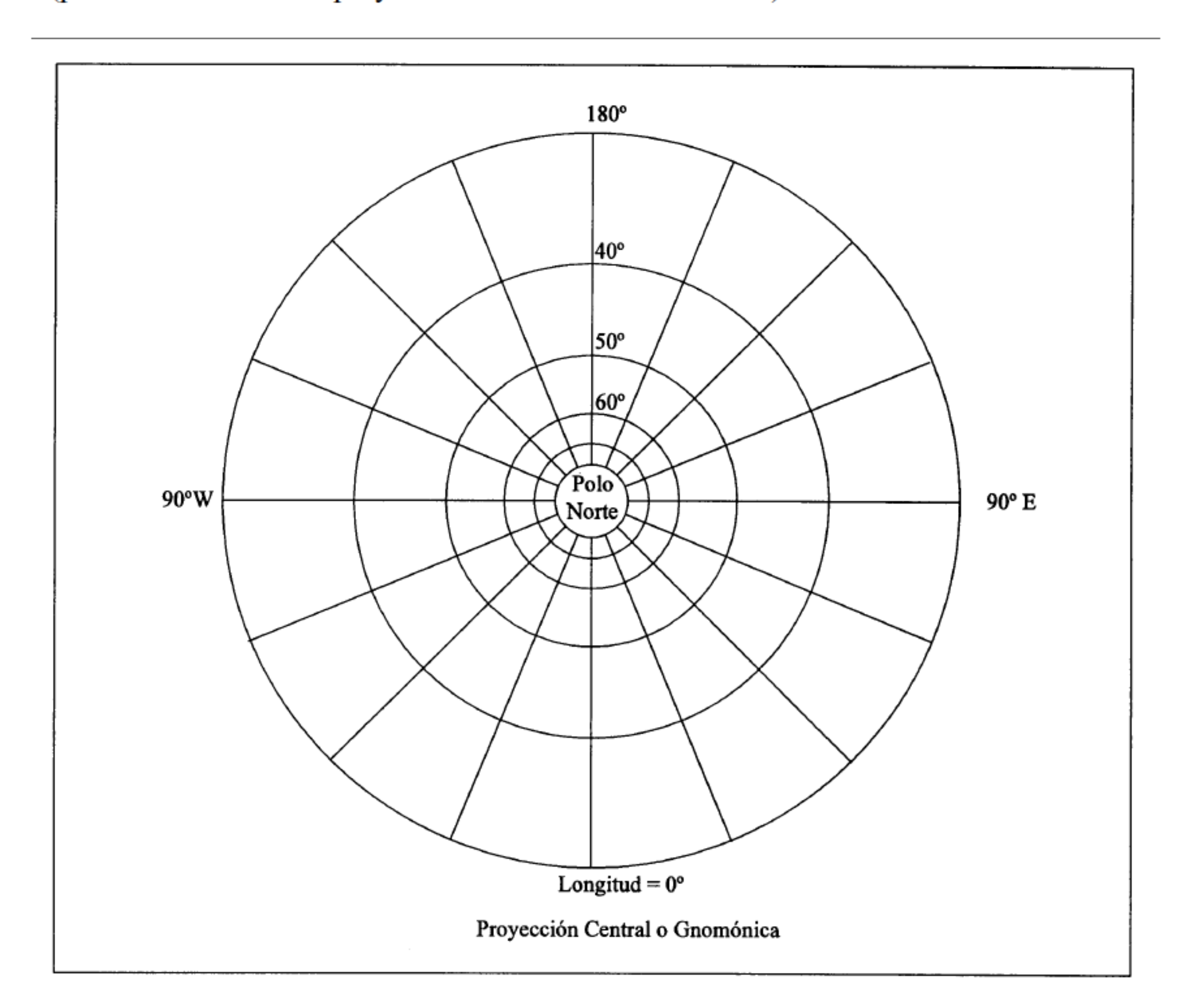
Este sistema de proyección es poco utilizado en Cartografía. Los puntos de la esfera se proyectan desde el centro de la Tierra sobre un plano tangente a ésta. Todo círculo máximo de la esfera se proyectará según una recta. Los meridianos se proyectan siempre según rectas.

La navegación aérea, que se mueve en ocasiones según ortodrómicas, o líneas de mínima distancia (arcos de círculo máximo en la esfera), tendrá en la gnomónica facilitado el problema por ser líneas rectas los caminos a seguir.

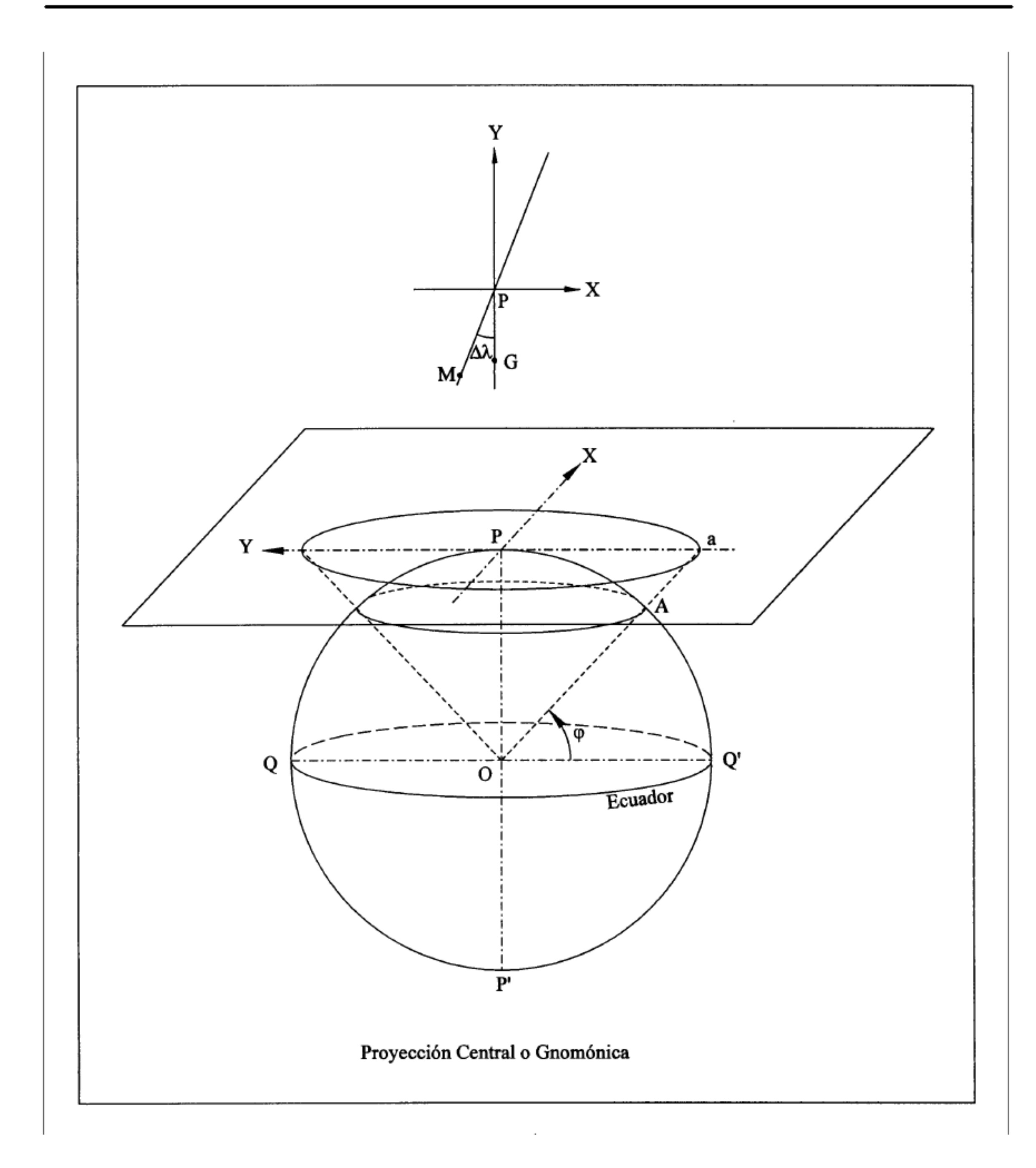
11.1. PROYECCIÓN CENTRAL O GNOMÓNICA ECUATORIAL O DIRECTA

El plano de proyección es paralelo al Ecuador, tangente a la Tierra en uno de los polos. Los meridianos serán rectas que pasarán por el polo y formarán ángulos iguales a la diferencia de longitudes y los paralelos circunferencias concéntricas.

Las coordenadas de los puntos de la esfera pueden obtenerse directamente o a partir de las obtenidas en la proyección escenográfica oblicua, sustituyendo φ_o = 90º y D = 0 (por estar el vértice de proyección en el centro de la esfera)



Proyección Central o Gnomónica



Proyección Central o Gnomónica

$D = 0 \qquad \varphi_o = 90^o$

Meridianos son rectas que pasan por el polo

$$X = \frac{\text{sen}\,\Delta\lambda \cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi} = \text{ctg}\ \varphi\ \text{sen}\ \Delta\lambda$$

Paralelos son círculos concéntricos (en polo)

$$Y = \frac{-\cos\varphi\cos\Delta\lambda}{\text{sen}\,\varphi} = -\ \text{ctg}\ \varphi\ \cos\Delta\lambda$$

Dividiendo miembro a miembro:

Ecuación de los meridianos $\frac{X}{Y} = -\operatorname{tg} \Delta\lambda$ Rectas que pasan por el Polo

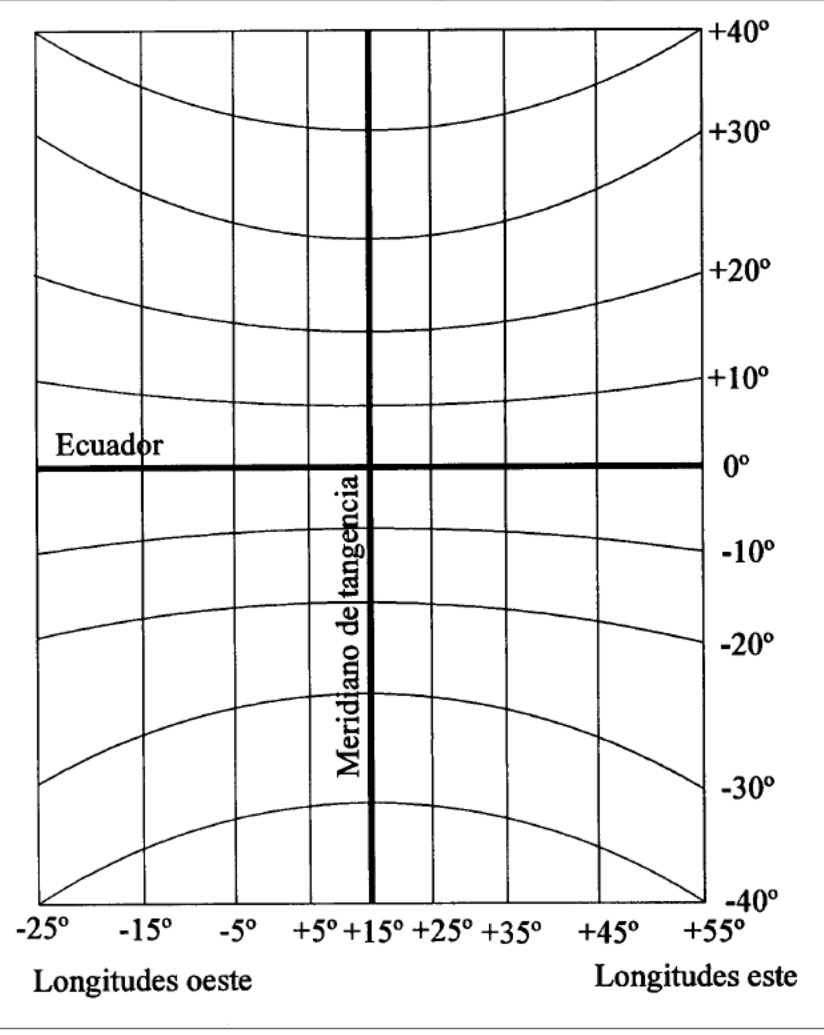
Elevando al cuadrado y sumando miembros:

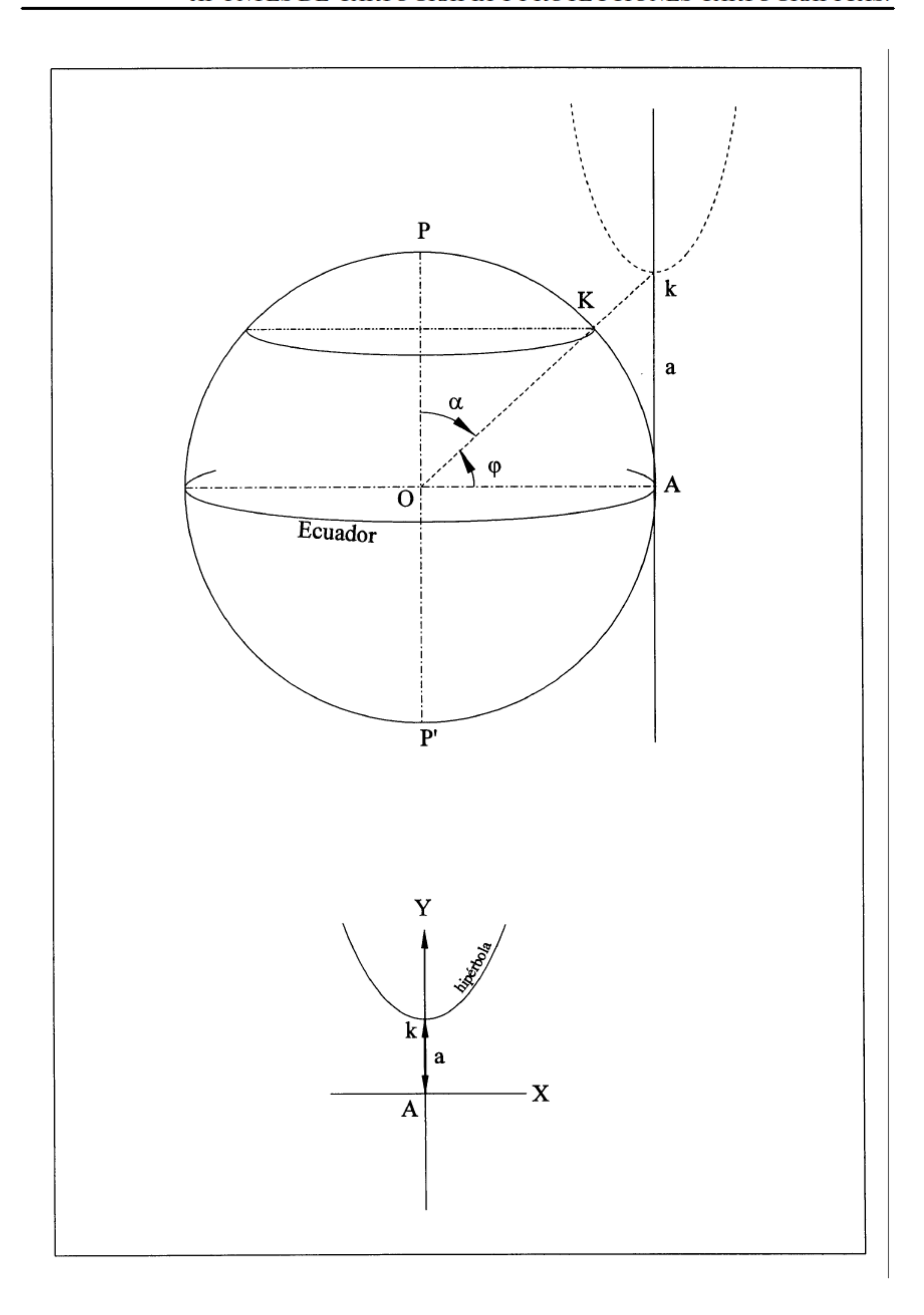
Ecuación de los paralelos $X^2 + Y^2 = \operatorname{ctg}^2 \varphi$ Círculos concéntricos.

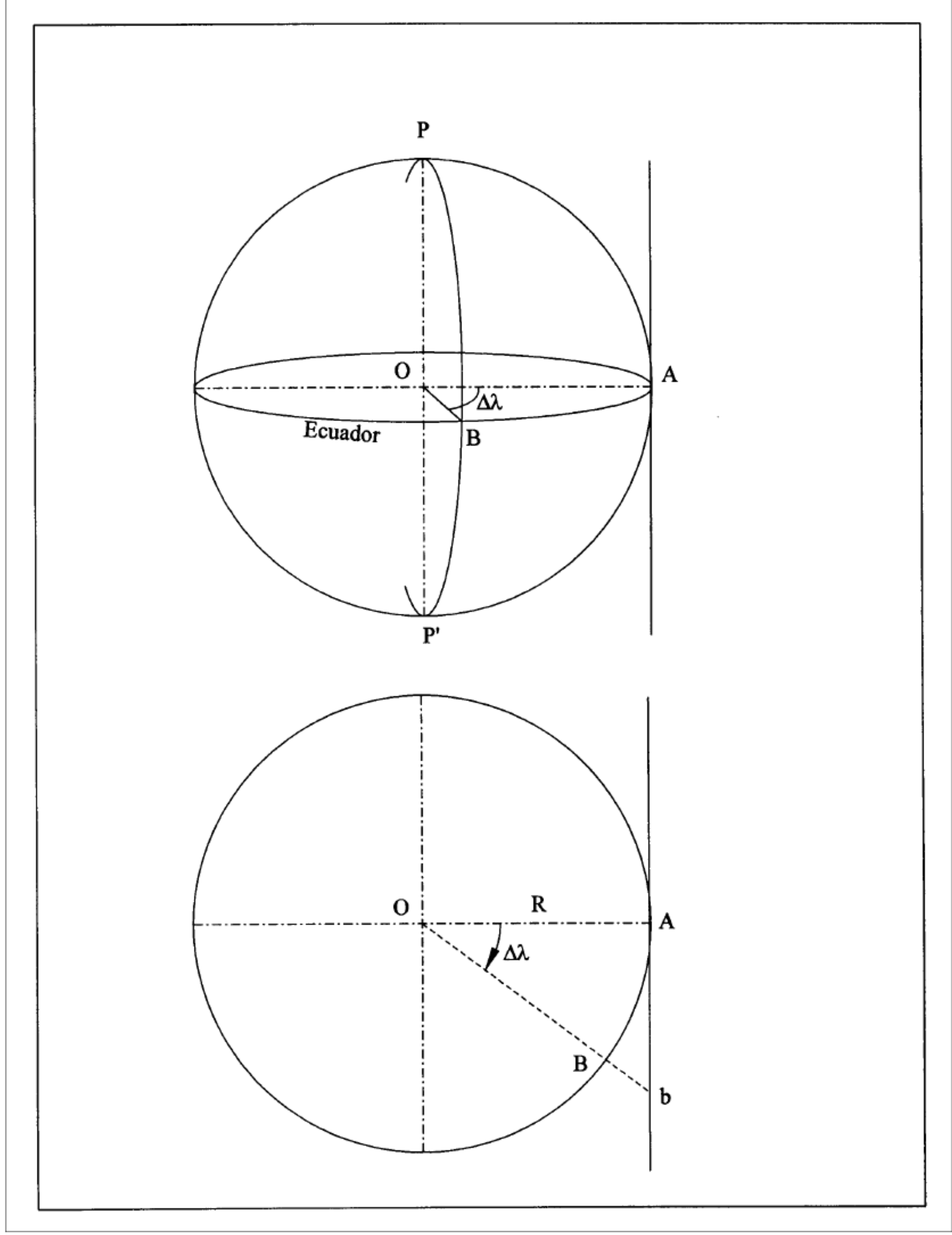
Las deformaciones en esta proyección aumentan rápidamente al alejarse del polo, por lo que este sistema servirá mejor para representar las regiones polares.

11.2. PROYECCIÓN GNOMÓNICA MERIDIANA O TRANSVERSA

El plano del cuadro es tangente al Ecuador en un punto A. Los meridianos son rectas paralelas entre sí y normales a la recta que representa el Ecuador. Los paralelos se obtienen como intersección de una superficie cónica (cuyo eje coincide con el terrestre) y un plano paralelo a dicho eje. Esta intersección genera una hipérbola.




P
K
k
a
α
φ
O
A
Ecuador
P'
Y
hipérbola
k
a
A
X



Ecuación de los meridianos

$X = \text{tg}\,\Delta\lambda$

Ecuación de los paralelos

$Y = \dfrac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\Delta\lambda}$

Meridianos son rectas paralelas entre si, perpendiculares al ecuador $D = 0$

Paralelos son hipérbolas cuyo eje es el meridiano del punto tangente $\varphi_o = 0^o$

Estas expresiones dan las coordenadas x e y de un punto en función de las geográficas.

11.3. PROYECCIÓN GNOMÓNICA HORIZONTAL U OBLÍCUA

El plano de proyección es el horizonte de un lugar cualquiera de latitud φ_o. Según sean las latitudes $\varphi = 90 - \varphi_o$, $\varphi > 90 - \varphi_o$, $\varphi < 90 - \varphi_o$ se generarán diferentes cónicas para representar los paralelos. Siendo φ_o la latitud del centro de proyección y haciendo D = 0 en las ecuaciones de la proyección escenográfica, se obtiene:

$$X = \frac{\text{sen}\,\Delta\lambda \cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos\Delta\lambda} \qquad Y = \frac{\text{sen}\,\varphi \cos\varphi_o - \cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi_o \cos\Delta\lambda}{\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos\Delta\lambda}$$

Paralelos: $\varphi = 90 - \varphi_o$ es una parábola
$\varphi > 90 - \varphi_o$ son elipses
$\varphi < 90 - \varphi_o$ son hipérbolas

Meridianos son rectas que pasan por el polo D = 0

La línea de mínima distancia sobre la esfera es el círculo máximo. Los círculos máximos en la proyección gnomónica son rectas. La *Ortodrómica* es la línea de mínima distancia.

12. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

El vértice de proyección es un punto de la esfera y el plano del cuadro es normal al diámetro que pasa por éste, pudiendo ser tangente a la esfera, pasar por el centro o ser cualquier otro plano paralelo a ellos.

Propiedades:

* Toda circunferencia en la esfera se proyecta según una circunferencia, menos las que pasan por el vértice de proyección que se proyectan según rectas.

* La proyección es conforme, por tanto los ángulos se conservan.

* Los meridianos son rectas concurrentes.

* Los paralelos y el Ecuador son circunferencias concéntricas.

* Los círculos máximos cortan al Ecuador en puntos diametralmente opuestos.

* Los círculos menores son circunferencias (excepto si pasan por el Polo de proyección, que son rectas), cuyo centro es la proyección del vértice del cono circunscrito a lo largo del círculo menor en cuestión.

Este sistema se emplea para representar las regiones polares y para las cartas de navegación, sobre todo aeronáuticas.

12.1. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA POLAR

$$X = \frac{2 \operatorname{sen} \Delta\lambda \cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi}$$

Meridianos son rectas que pasan por el polo

$$Y = \frac{-2 \cos\varphi \cos\Delta\lambda}{1 + \operatorname{sen}\varphi}$$

Paralelos son circunferencias concéntricas

$D = 1$ $\qquad \varphi_o = 90^o$

Ecuación de los meridianos

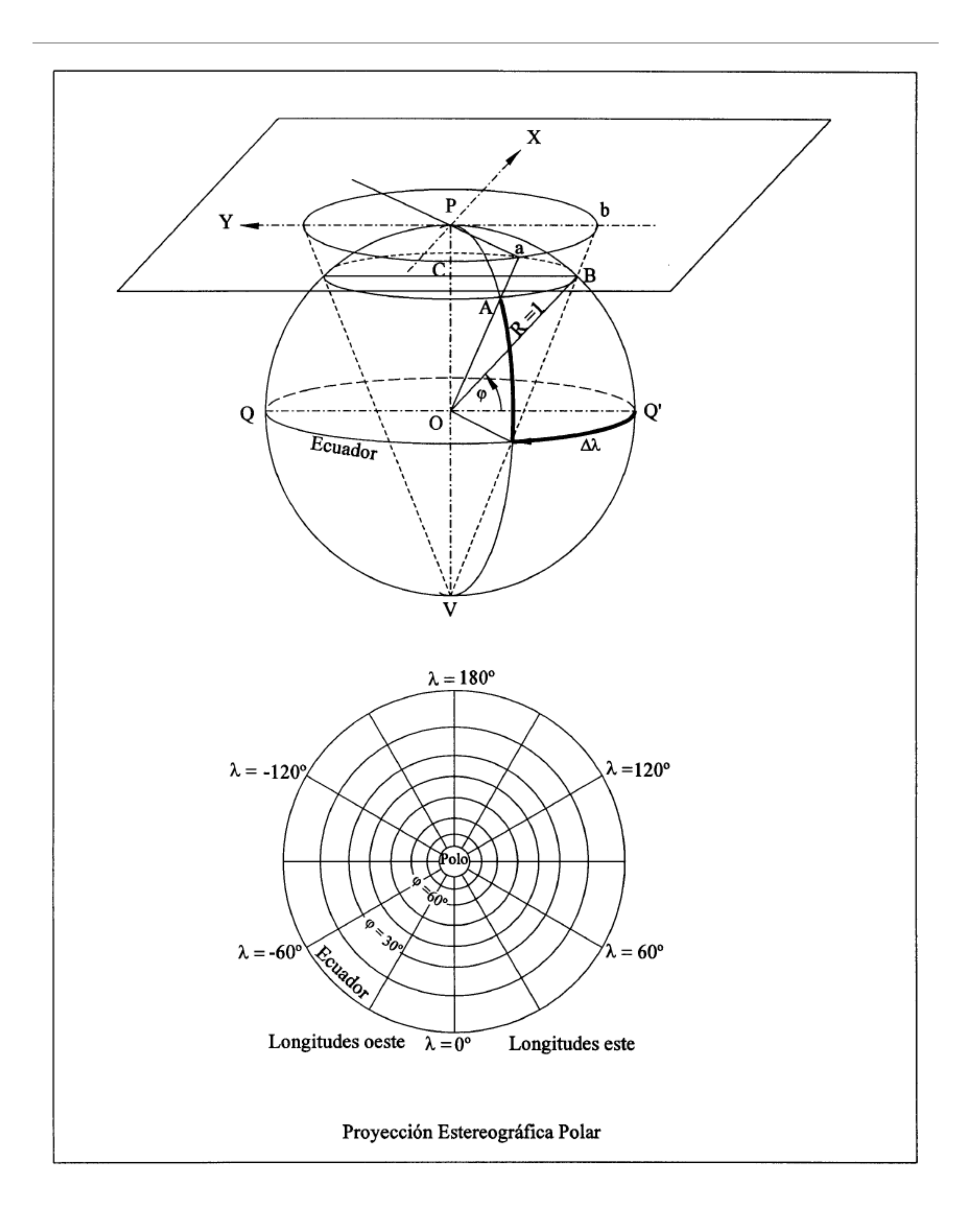
$$\frac{X}{Y} = -\operatorname{tg}\Delta\lambda$$

Ecuación de los paralelos

$$X^2 + Y^2 = \frac{4\cos^2\varphi}{(1 + \operatorname{sen}\varphi)^2}$$

Las deformaciones son mínimas en las proximidades del polo, aumentando al acercarnos al Ecuador.

Esta proyección es muy utilizada en Astronomía para las cartas del cielo en las zonas próximas a los polos. También se usa en navegación para las regiones polares. Es la que mejor representa a la esfera (o elipsoide), con módulos de deformación menores incluso que en la proyección U.T..M.



Proyección Estereográfica Polar

12.2. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA MERIDIANA O TRANSVERSA

El vértice de proyección es un punto del Ecuador, y el plano de proyección es normal al diámetro que pasa por él. El meridiano sobre el que se proyecta, se representa por una circunferencia de radio 2R.

$$X = \frac{2 \operatorname{sen} \Delta\lambda \cos\varphi}{1 + \cos\varphi \cos\Delta\lambda}$$ Meridianos son circunferencias que pasan por los polos

$$Y = \frac{2 \operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos\varphi \cos\Delta\lambda}$$ Paralelos son circunferencias

D = 1 $\varphi_o = 0^o$

Ecuación de los meridianos
$X^2 + Y^2 - 4 X \operatorname{ctg} \Delta\lambda - 4 = 0$

Ecuación de los paralelos
$X^2 + Y^2 - 4 Y \operatorname{cosec} \varphi + 4 = 0$

Una de las aplicaciones de esta proyección, es la representación de la esfera celeste, ya que al ser conforme, las figuras que perfilan en el cielo las estrellas, y que dan lugar a distintas constelaciones, conservan la misma imagen en el mapa.

12.3. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA OBLICUA U HORIZONTAL

La proyección se efectúa sobre un plano paralelo al del horizonte de un lugar determinado, cuya latitud llamaremos φ_o

$$X = \frac{2 \operatorname{sen} \Delta\lambda \cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda}$$

$$Y = \frac{2 (\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi_o - \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi_o \cos\Delta\lambda)}{1 + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_o \cos\Delta\lambda}$$

Meridianos son circunferencias que pasan por los polos

Paralelos son circunferencias D = 1

Ecuación de los meridianos:
$$X^2 + Y^2 - \frac{2X \operatorname{ctg} \Delta\lambda}{\cos\varphi_o} + 2Y \operatorname{tg} \varphi_o = 1$$

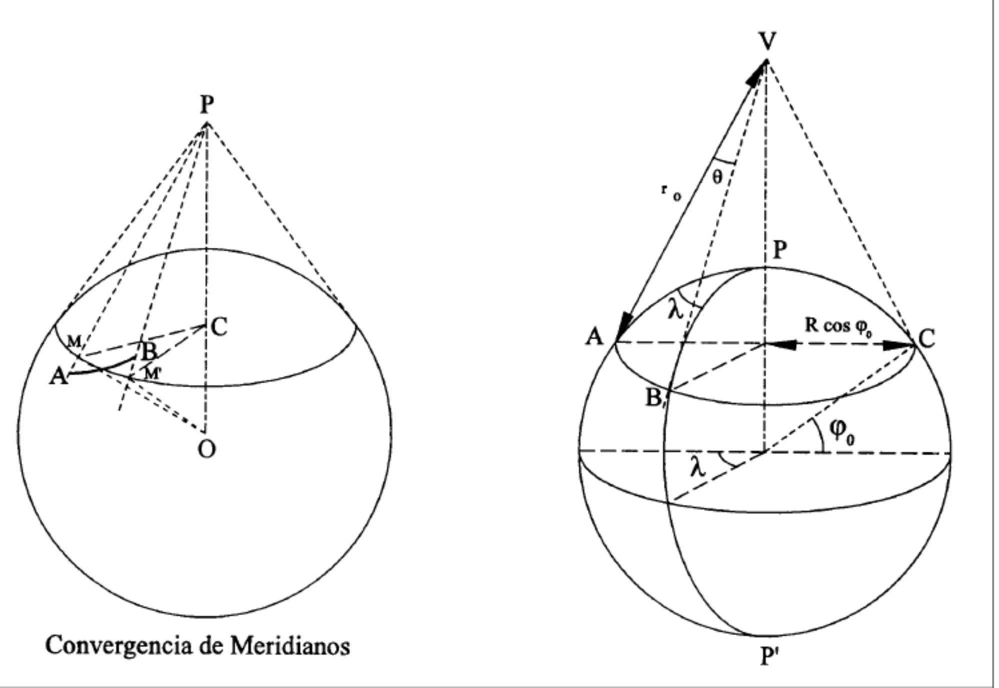
Ecuación de los paralelos:
$$(X^2 + Y^2) (\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \varphi_o) - 2 Y \cos \varphi_o + \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_o = 0$$

El factor de escala en esta proyección es: $h = k = \frac{2}{1 + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi_o + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\Delta\lambda}$, que nos dice la anamorfosis o reducción lineal que existe en un punto de coordenadas φ y $\Delta\lambda$.

13. DESARROLLOS CÓNICOS DIRECTOS

Se considera un cono tangente a una esfera a lo largo de un paralelo φ_o, valor que dependerá de la zona que se desee representar. Establecida la correspondencia entre los puntos de la esfera y los de la superficie cónica, a continuación se desarrolla el cono y se obtiene una representación en la que los meridianos son rectas que pasan por un punto (vértice del cono), y cuyos ángulos respecto del meridiano central (que será el eje Y) es la convergencia de meridianos θ. Los paralelos son arcos de circunferencia con centro en el vértice. Según se establezca la correspondencia entre los paralelos en la esfera y en el plano, se obtendrán distintos tipos de desarrollos cónicos.

CONVERGENCIA DE MERIDIANOS.



El meridiano de origen es el que pasa por el punto A que está sobre la esfera. Sea un punto B que se encuentra en el mismo paralelo (que será el de tangencia del cono considerado). La latitud de A y B es φ_o que coincide con la del paralelo de tangencia, que será automecoico.

Si $\Delta\lambda$ es la diferencia de longitudes entre A y B. Al desarrollar el cono, cada meridiano se representará según una recta, que formará con la del meridiano origen , un ángulo θ. Todos los meridianos pasarán por el vértice V.

El arco AB sobre la esfera es:

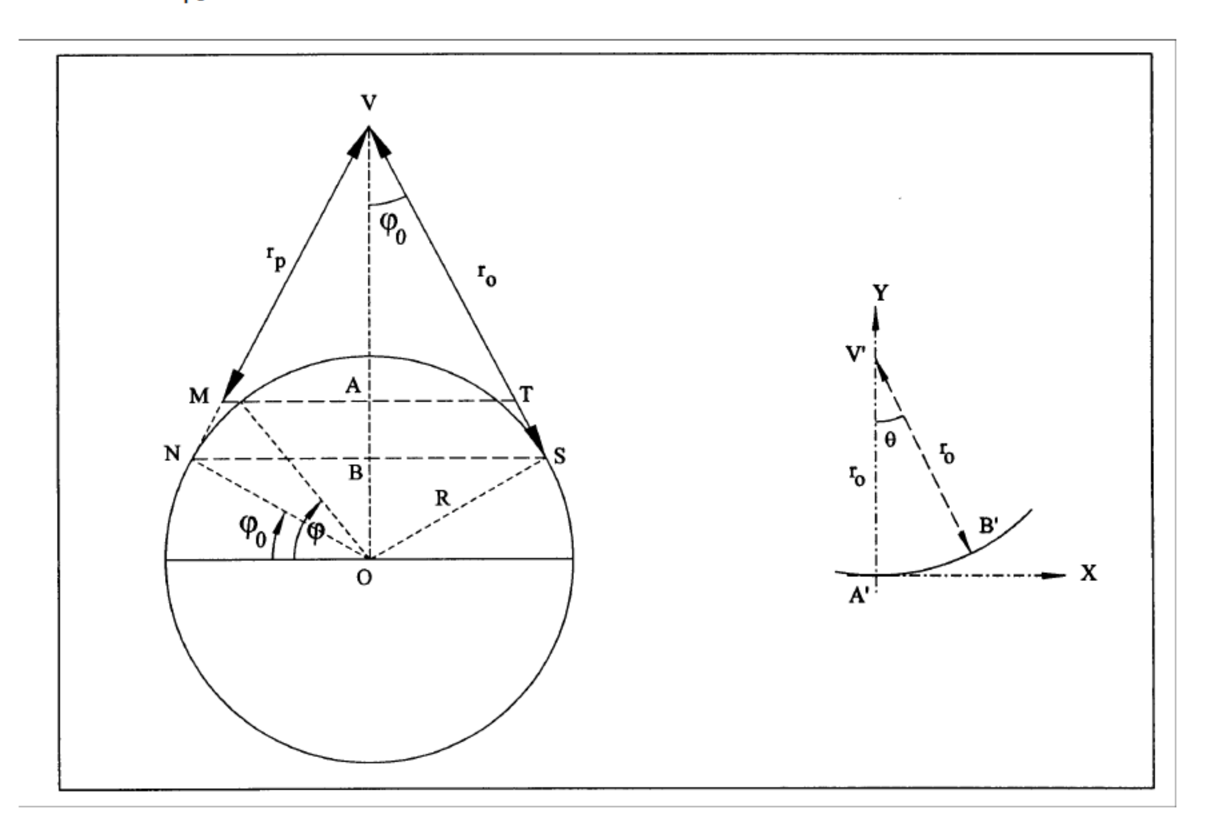
$$AB = s = R \cos \varphi_o \Delta\lambda$$

$$\Delta\lambda = \frac{s}{R\cos\varphi_0} \qquad r_0 = R \operatorname{ctg} \varphi_o \qquad \theta = \frac{s}{r_0}$$

$$s = \Delta\lambda \; R \cos \varphi_o = r_0 \, \theta \qquad \theta = \Delta\lambda \; \operatorname{sen} \varphi_o$$

13.1. DESARROLLO CÓNICO DIRECTO

Consideramos los planos de los meridianos y los paralelos que cortarán a la superficie cónica, según generatrices y secciones rectas (circunferencias) de la superficie cónica, que al desarrollarla, se transformarán respectivamente en las rectas concurrentes y arcos de circunferencias concéntricas. El paralelo a lo largo del cual el cono es tangente, es el de latitud φ_o



$$\frac{r_p}{r_0} = \frac{VA}{VB} = \frac{VB + OB - OA}{VB} = 1 + \frac{OB - OA}{VB}$$

$$\frac{r_p}{R \; ctg \, \varphi_0} = 1 + \frac{R \, sen \, \varphi_o - R \, sen \, \varphi}{R \cos \varphi_0 \; ctg \, \varphi_0}$$

El radio del paralelo de latitud φ

$$r_p = R \; \frac{1 - sen \, \varphi_0 \; sen \, \varphi}{\cos \varphi_0 \; sen \, \varphi_0}$$

El eje Y es el meridiano central de la zona a representar y el eje X la tangente al paralelo de latitud φ_o en el punto considerado central.

Las coordenadas rectangulares de un punto M de la esfera de coordenadas λ, φ

$$\Delta X = r_p \; sen \, \theta$$

$$\Delta Y = r_0 - r_p \cos \theta = r_0 - r_p + \Delta X \; tg \, \frac{\theta}{2}$$

Para calcular las coordenadas cartesianas de un punto de coordenadas geográficas λ, φ, habrá que calcular antes la convergencia θ y el radio r_p del paralelo.

13.2. DESARROLLO CÓNICO CONFORME DE LAMBERT

Es una de las proyecciones cónicas más empleadas. Su construcción comienza por la representación de la esfera sobre una superficie auxiliar, que es un cono circunscrito a lo largo de un paralelo. Posteriormente este paralelo se desarrolla sobre un plano.

No es una proyección geométrica, pues la separación entre paralelos se calcula analíticamente de forma que, igual que en la proyección Mercator, se obtiene una representación conforme.

Los *meridianos* son rectas concurrentes (en el punto que corresponde en el desarrollo al vértice del cono) y forman ángulos iguales entre sí los que tienen la misma diferencia de longitud.

Los paralelos son circunferencias concéntricas (el centro es el vértice del cono)

Los puntos se proyectan desde el centro de la esfera

En este sistema de desarrollo cónico se impone la condición de que la representación sea conforme. Consideramos la superficie cónica tangente a lo largo del paralelo de latitud media φ_o de la zona a representar. Este paralelo será automecoico y en el desarrollo vendrá representado por una circunferencia de radio r_0, que vale igual en todos los desarrollos cónicos $r_0 = R \text{ ctg } \varphi_o$

<u>SUPUESTO 1. TIERRA ESFÉRICA</u>

$r_0 = R \text{ ctg } \varphi_o$

$\Delta X = X - X_0 = X - 600.000$

$$r_p = r_e \left(\text{tg}(45° - \frac{\varphi}{2}) \right)^{\text{sen}\,\varphi_0}$$

$\Delta Y = Y - Y_0 = Y - 600.000$

r_e = Radio del ecuador para φ_o tangente

$r_0 = R \text{ ctg } \varphi_o$

$$r_e = \frac{R\text{c tg}\,\varphi_o}{\left(\text{tg}(45° - \frac{\varphi o}{2}) \right)^{\text{sen}\,\varphi_0}}$$

$$r_e = \frac{R\text{c tg}\,\varphi o}{\left(\text{tg}(45° - \frac{\varphi o}{2}) \right)^{\text{sen}\,\varphi_0}}$$

$\Delta X = r_p \text{ sen } \theta$

$X = X_0 + \Delta X$

$$\text{tg } \theta = \frac{\Delta X}{ro - \Delta Y}$$

$\Delta Y = r0 - r_p \cos \theta$

$Y = Y_0 + \Delta Y$

$$\lambda = \frac{\theta}{\text{sen}\,\varphi_o}$$

φ_o = latitud del paralelo tangente

$$\varphi = 2\left(45° - \text{arctg}\left(\frac{rp}{re}\right)\right)^{\left(\frac{1}{\text{sen}\,\varphi_0}\right)}$$

r_o = radio del paralelo tangente
R = 6.370 km.

TIERRA ELIPSOIDE

$$r_p = r_e \left[tg\left(\frac{\zeta}{2}\right)\left(\frac{1+e\cos\zeta}{1-e\cos\zeta}\right)^{\frac{e}{2}} \right]^{sen\,\varphi_0}$$

$$\Delta X = X - 600.000$$

$\zeta = 90º - \varphi$

$\Delta Y = Y - 600.000$

$r_0 = N_0\ ctg\ \varphi_o$

$r_0 = N_0\ ctg\ \varphi_o$

$$N = \frac{a}{\left(1-e^2\,sen^2\,\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$tg\ \theta = \frac{\Delta X}{r_o - \Delta Y}$$

$$r_e = \frac{r_o}{\left[tg\left(\frac{\zeta}{2}\right)\left(\frac{1+e\cos\zeta}{1-e\cos\zeta}\right)^{\frac{e}{2}} \right]^{sen\,\varphi_0}}$$

$$r_p = \frac{\Delta X}{sen\,\theta}$$

$X = 600.000 + r_p\ sen\ \theta$

$$\Delta\lambda = \frac{\theta}{sen\,\varphi_o}$$

$Y = 600.000 + r_0 - r_p\ cos\ \theta$

$\zeta = 90º - \varphi$

$\theta = \Delta\lambda\ sen\ \varphi_o$

$$\left[tg\left(\frac{\zeta}{2}\right)\left(\frac{1+e\cos\zeta}{1-e\cos\zeta}\right)^{\frac{e}{2}} \right] = \left(\frac{r_p}{r_e}\right)^{\left(1/sen\,\varphi_0\right)} = k$$

$$tg\ \frac{\zeta}{2} = \frac{k}{\left(\frac{1+e\cos\zeta}{1-e\cos\zeta}\right)^{e/2}}$$

Elipsoide de Struve:

$a = 6.378.298,3$ m

$e^2 = 0,00677436$

13.3. DESARROLLO CÓNICO CONFORME DE LAMBERT LIMITADO

(***no rigurosamente conforme***)

Esta proyección se utiliza en zonas de pequeña extensión en las que las deformaciones producidas, casi no tienen representación.

Se basa en proyectar los puntos de la esfera desde un vértice auxiliar situado a una distancia respecto del centro de la esfera de 3/2 del radio.

TIERRA ESFÉRICA

$r_0 = R \operatorname{ctg} \varphi_o$

$\Delta X = X - X_0$

$r = r_0 \pm Y_0$

$\Delta Y = Y - Y_0$

$Y_0 = s + \frac{s^3}{6R^2}$

$\operatorname{tg} \Delta\theta = \frac{\Delta X}{r_o - \Delta Y}$

$\theta = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi_0$

$\Delta\lambda = \frac{\Delta\theta}{\operatorname{sen} \varphi_o}$ $\qquad \lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$

$\Delta X = r_p \operatorname{sen} \Delta\theta = (r_0 - Y_0) \operatorname{sen} \Delta\theta$

$Y_0 = \Delta Y - \Delta X \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$

$\Delta Y = r_0 - r_p \cos \Delta\theta = r_0 - r_p + 2\, r_p \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\theta}{2}$

$Y_0 \approx s = R\,\Delta\varphi$

$\Delta Y = Y_0 + 2\,(r_0 - Y_0) \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\theta}{2}$

$\Delta\varphi = \frac{Y_o}{R}$ ó $\Delta\varphi'' = \frac{Y_o}{R \operatorname{sen} 1''}$

$X = X_0 + \Delta X$

$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$

$Y = Y_0 + \Delta Y$

$s = Y_0 - \frac{Y_0^{\,3}}{6R^2}$

$\Delta\varphi = \frac{s}{R}$

TIERRA ELIPSOIDE

El cono se considera tangente al elipsoide a lo largo del paralelo central de la zona, de latitud φ_0 y se toma como meridiano origen uno que ocupe sensiblemente el centro de la misma. La intersección del meridiano y paralelo será el origen de coordenadas. Primero se calculan N y ρ del elipsoide a adoptar (Hayford)

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_0 = N \operatorname{ctg} \varphi_o$$

$$\Delta \theta'' = \Delta \lambda'' \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$\beta_o = \frac{\Delta\varphi''}{r''} \rho$$

$$r'' = 206.265$$

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$Yo = \beta + \frac{\beta_0^3}{6N\rho}$$

$$\Delta X = (r_o - Y_o) \operatorname{sen} \Delta \theta$$

$$\Delta Y = Yo + \Delta X \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\Delta X = X - X_o$$

$$\Delta Y = Y - Y_o$$

$$\operatorname{tg} \Delta \theta = \frac{\Delta X}{r_o - \Delta Y}$$

$$\Delta \lambda'' = \frac{\Delta\theta''}{\operatorname{sen} \varphi_o}$$

$$\lambda = \lambda_o + \Delta \lambda$$

$$Yo = \Delta Y - \Delta X \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\Delta \varphi'' = \frac{\beta_o}{\rho} r'' = \frac{\beta_o}{\rho \operatorname{sen} 1''}$$

$$\varphi = \varphi_o + \Delta \varphi$$

13.4. Coordenadas Lambert.

La cartografía militar española ha empleado durante mucho tiempo, las coordenadas y la cuadrícula de este sistema. Para su determinación se eligieron como ejes OY y OX, un meridiano central (el de Madrid), y la recta perpendicular en su intersección con el paralelo 40º, que es un punto próximo a Aranjuez.

Las rectas de la cuadrícula son paralelas a los ejes OY y OX, por tanto, no son ni meridianos ni paralelos.

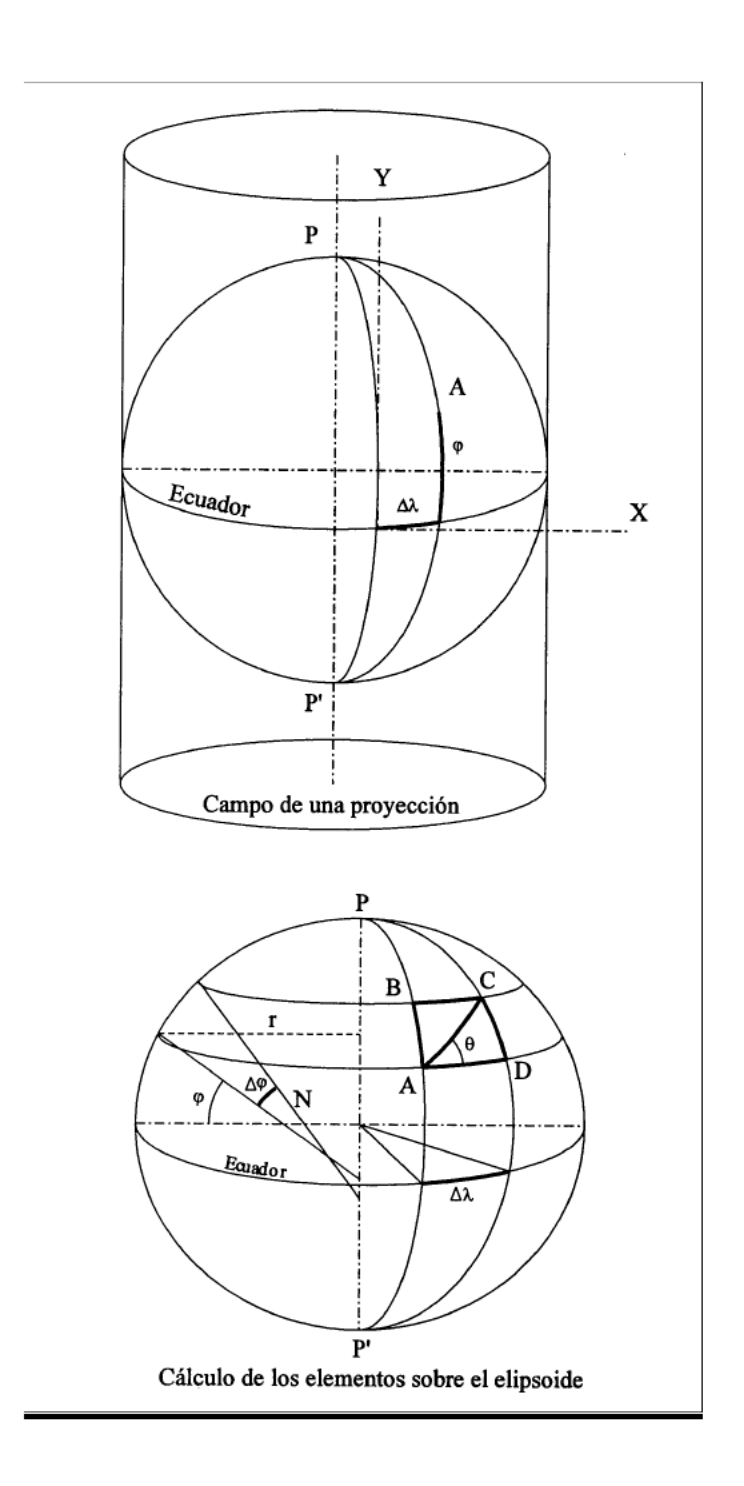
Para evitar las coordenadas negativas se traslada el origen 600 kms al Oeste y 600 kms. al Sur, es decir, que la intersección de los ejes tiene coordenadas X = 600.000 , Y = 600.000

En un punto cualquiera, la paralela al eje OY forma con el meridiano un ángulo, llamado *convergencia de meridianos* (que es cero en el meridiano central) Es el ángulo que forma el Norte geográfico y el Norte de la cuadrícula Lambert.

Al Este de Madrid, el Norte Lambert está a la derecha del geográfico y al Oeste de Madrid a la izquierda. La convergencia de meridianos aumenta al aumentar las longitudes del punto respecto a Madrid.

14. DESARROLLOS CILÍNDRICOS DIRECTOS

Se considera un cilindro tangente a una esfera a lo largo de su ecuador, estableciendo entre los puntos de ambas superficies una correspondencia biunívoca. A continuación se desarrolla el cilindro y se obtiene una representación en la que los meridianos son rectas paralelas entre sí y cuya distancia es proporcional a la correspondiente diferencia de longitud. Los paralelos son rectas normales a los meridianos y paralelas entre sí. Según la forma en que se establezca la correspondencia entre los puntos de la esfera y los del cilindro, se obtendrán distintos tipos de desarrollos.



Campo de una proyección

Cálculo de los elementos sobre el elipsoide

14.1. DESARROLLO CILINDRICO DIRECTO EQUIVALENTE DE LAMBERT

Definido el cilindro tangente a la Tierra a lo largo del Ecuador, consideramos sobre él las intersecciones de los planos de los meridianos y los paralelos. El desarrollo conserva las áreas (equivalente), el Ecuador es automecoico y las deformaciones lineales aumentan con la latitud.

Ecuación de meridianos $X = \lambda$ Ecuación de paralelos $Y = \text{sen}\ \varphi$

Los Meridianos son rectas paralelas

Los Paralelos son rectas paralelas

La proyección es equivalente. El Ecuador es automecoico.

14.2. MERIDIANOS AUTOMECOICOS

Con el cilindro tangente a lo largo del Ecuador, a los puntos de cada meridiano les haremos corresponder los de la generatriz del cilindro y para situar un punto M de latitud φ, lo haremos llevando sobre la generatriz una distancia Em igual a la longitud del arco de meridiano EM. En esta proyección dos paralelos equidistantes en la Tierra, equidistan en la carta.

Las deformaciones aumentarán al alejarse del Ecuador y la carta se hace inservible a partir de cierta latitud.

Ecuación de meridianos $X = \lambda$ Ecuación de paralelos $Y = \varphi$

Los Meridianos y Paralelos son rectas.

14.3. DESARROLLO CILÍNDRICO DIRECTO CONFORME DE MERCATOR. (CARTA DE MERCATOR)

Tierra Esférica

Los meridianos y paralelos son representados por rectas paralelas entre sí, pero aquí con la condición de ser la representación conforme. En esta proyección se alteran las superficies y las distancias, siendo el sistema más usado en navegación por las ventajas que posee.

El fundamento de este desarrollo es la alteración de la distancia entre los paralelos, de modo que las deformaciones en el sentido de la latitud sean iguales a las deformaciones existentes en el sentido de la longitud. A partir de los 70º de latitud, la carta se hace inservible por las deformaciones.

La carta de Mercator se ideó exclusivamente para la navegación, por ser conforme (conserva ángulos), manteniendo un mismo rumbo, para ir de un punto A a otro B, bastará situarlos en el mapa y unirlos con una recta. El ángulo que esa recta forma en la carta con los meridianos, define el rumbo R con el que habrá que navegar.

La ventaja que supone la sencillez de este método de navegación, compensa el mayor recorrido al navegar siguiendo la loxodrómica, en lugar del arco de círculo máximo, que sería el camino más corto entre dos puntos A y B, y que se denomina ortodrómica. Este último es el camino que se sigue en trayectos largos.

En todos los desarrollos cilíndricos directos, las deformaciones aumentan al alejarse del Ecuador.

Se observa la variación de escala al aumentar la latitud, ya que sin más que calcular el valor de sec φ cuando la latitud es 60º, se comprueba que si un mapa está en escala, por ejemplo 1:10.000 en las zonas ecuatoriales, a esta latitud de 60º ya habríamos pasado a escala 1:5.000, por lo que a partir de esta latitud es prácticamente inservible.

Comparando dos representaciones, una Mercator y una cónica Lambert de una misma zona, por ejemplo Europa, puede apreciarse cómo los países escandinavos se representan en Mercator a doble tamaño que en Lambert. La causa fundamental es la deformación que se produce en Mercator a estas latitudes. Por ejemplo, en Groenlandia, que siendo un territorio de superficie aproximada a la octava parte de América del Sur, resulta igual de grande que esta.

Estas anomalías no reducen el valor ni la utilidad de la proyección Mercator, que no debe emplearse para comparar superficies ni para medir distancias, sino tan solo para el trazado de loxodrómicas, utilidad para la que se creó. Las líneas de rumbo magnético, que sobre la esfera son espirales, se representan en la proyección Mercator por líneas rectas, fáciles de trazar.

Ecuación de meridianos $X = \lambda$

Ecuación de paralelos $Y = \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$

Meridianos son rectas paralelas entre sí, al ser desarrollo conforme, la loxodrómica es una recta.

Ortodrómica es el círculo máximo que une dos puntos (es el camino más corto sobre la superficie terrestre)

Loxodrómica es la línea sobre la superficie terrestre que corta todos los meridianos bajo un mismo ángulo (mantiene el rumbo). Como en la carta Mercator los meridianos son rectas paralelas entre sí, la loxodrómica al considerarla en un desarrollo conforme, viene representada por una línea recta.

Ejemplo: en vuelos cortos, la loxodrómica es el camino ideal y es el que sigue el piloto. En vuelos largos suele dividirse la ortodrómica en tramos de unos 500 a 1000 kms y dentro de cada uno se siguen loxodrómicas.

Longitud de la loxodrómica (aprox.) $l = R\ \Delta\varphi \sec z$

Acimut de la loxodrómica (aprox.) $\operatorname{tg} z = \frac{\Delta X}{\Delta Y}$

R = Radio de la Tierra
$\Delta\varphi$ = diferencia de latitudes
ΔX = diferencia de coordenadas X planas
ΔY = diferencia de coordenadas Y planas
l = longitud loxodrómica
z = acimut loxodrómica
1 milla $\approx$ 1 minuto

Tierra Elipsoide

Ecuación de meridianos $X = a\lambda$

Ecuación de paralelos $Y = a\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1 - e\,\mathrm{sen}\,\varphi}{1 + e\,\mathrm{sen}\,\varphi}\right)^{\frac{1}{2}e}\right]$

a , e son parámetros del elipsoide

15. DESARROLLOS CILÍNDRICOS TRANSVERSOS

El eje del cilindro (en lugar de coincidir con el eje de la Tierra) está situado en el Ecuador y será tangente a la esfera terrestre a lo largo de un meridiano.

15.1. CONFORME DE GAUSS (Tierra esférica)

Este sistema de representación es rigurosamente conforme y es el adecuado para representar países o zonas alargadas en el sentido de los meridianos. Las deformaciones aumentan al separarse del meridiano central (el de tangencia del cilindro).

La Tierra se divide en 60 husos de 6º de longitud.

Ecuación de los meridianos $X = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{H}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

Ecuación de los paralelos $Y = Z$

$\operatorname{sen} H = \operatorname{sen} \lambda \cos \varphi$

$\operatorname{tg} Z = \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{\cos \lambda}$

15.2 UNIVERSAL TRANSVERSA MERCATOR (U.T.M.) (Tierra elipsoide)

Adoptada internacionalmente, tiene su fundamento en el desarrollo conforme de Gauss - Krüger.

En esta proyección se considera la Tierra como un elipsoide de revolución tangente interiormente a un cilindro, cuyo eje está situado en el plano del Ecuador. El elipsoide de referencia elegido es el de Hayford.

El problema, que tenía una solución geométrica cuando se consideraba la Tierra esférica, ha de tratarse ahora analíticamente. Las fórmulas obtenidas para su aplicación son válidas para toda la Tierra, pues empleando husos de 6º de amplitud, se representa la totalidad de la Tierra en 60 husos iguales. Una vez obtenidas las fórmulas para uno de ellos, serán las mismas que deberán utilizarse en todos. Los husos se numeran del 1 al 60 a partir del meridiano de 180º de longitud respecto del de Greenwich, por lo que este meridiano separa los husos números 30 y 31, estando España comprendida entre los husos 28, 29, 30 y 31.

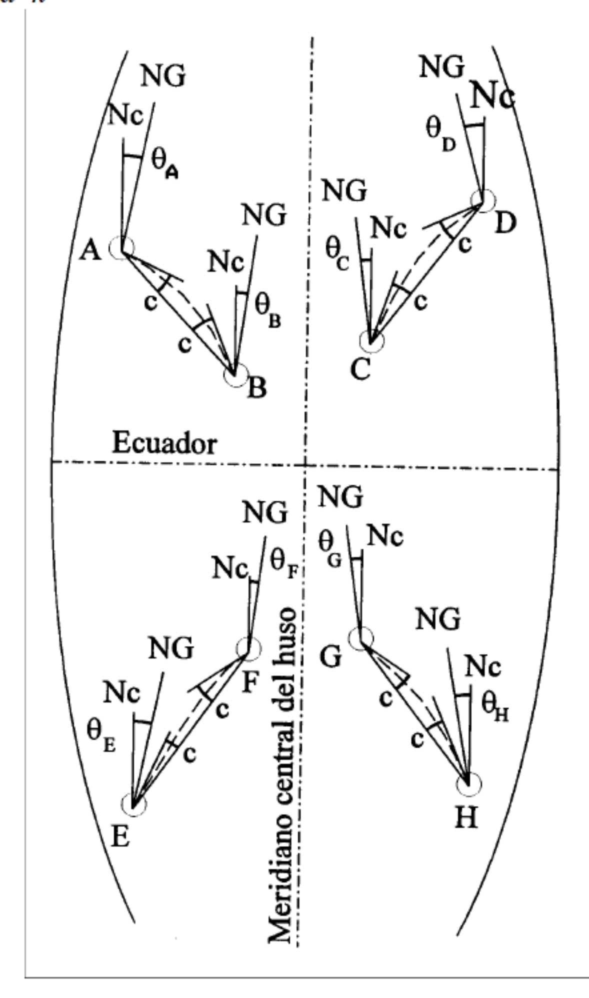
La proyección U.T.M. es conforme, siendo el meridiano central de cada huso automecoico y representado según una recta. La utilidad que tiene esta proyección, por su conformidad como aplicación a problemas geodésicos, la hace recomendable para la representación de casi todos los países, exceptuándose aquellas zonas situadas a $\pm 80º$ de latitud, en las que se utilizará la proyección estereográfica.

Las condiciones que se imponen en esta proyección son:

* La proyección será conforme.
* El meridiano central de cada huso ha de ser automecoico.
* El Ecuador y el meridiano central de cada huso se representarán por líneas rectas.
* El origen de coordenadas en la proyección será el correspondiente a la intersección del Ecuador y el meridiano central del huso.

16. *Análisis y cálculo de los elementos que se utilizan en la proyección U.T.M.*

Transformación de coordenadas U.T.M. en geográficas y viceversa
Convergencia de meridianos θ
Reducciones a la cuerda c
Aplicaciones angulares
Factor de escala k



16.1. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

El problema concreto estriba en obtener en función de las coordenadas geodésicas λ , φ (correspondiente al elipsoide) las coordenadas planas (X , Y) en la proyección U.T.M., así como el problema inverso.

El empleo de estas fórmulas nos resuelve todo el problema del transporte de coordenadas en el elipsoide, ya que bastará transformar las coordenadas geodésicas del vértice de partida en U.T.M. y en esta proyección calcular las coordenadas planas del vértice buscado. Volviendo a aplicar las fórmulas de la transformación inversa, pasamos nuevamente al elipsoide.

16.1.1. Transformación de Geográficas a UTM

Cálculo de las coordenada X e Y, conocidas λ y φ

$X = 500.000 + (IV)\, p + (V)\, p^3 + B_5$ $\qquad$ $(I) = k_o\, \beta$

$Y = (Y) + (II)\, p^2 + (III)\, p^4 + A_6$ $\qquad$ $(II) = \frac{1}{2} N \cos^2\varphi \operatorname{tg}\varphi \operatorname{sen}^2 1'' k_o\, 10^8$

$p = 0.0001\ \Delta\lambda''$ $\qquad$ $(III) = \frac{1}{24} N \cos^4\varphi\ \operatorname{tg}\varphi\ \operatorname{sen}^4 1'' (5 - \operatorname{tg}^2\varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4)\, k_o\, 10^{16}$

$\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda$ $\qquad$ $(IV) = N \cos\varphi \operatorname{sen} 1'' k_o\ 10^4$

$\eta = e' \cos\varphi$ $\qquad$ $(V) = \frac{1}{6} N \cos^3\varphi \operatorname{sen}^3 1'' (1 - \operatorname{tg}^2\varphi + \eta^2)\, k_o\ 10^{12}$

e' = segunda excentricidad elipse meridiana

$$A6 = \frac{1}{720}\, p^6 N \cos^6\varphi\ \operatorname{tg}\varphi\ \operatorname{sen}^6 1'' (61 - 58 \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^4\varphi + 270\eta^2 - 330 \operatorname{tg}^2\varphi\ \eta^2)\, k_o\, 10$$

$e'^2 = 0.00676817...$

$$B_5 = \frac{1}{120}\, p^5 N \cos^5\varphi\ \operatorname{sen}^5 1'' (5 - 18 \operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^4\varphi + 14\eta^2 - 58 \operatorname{tg}^2\varphi\ \eta^2)\, k_o\, 10^{20}$$

β = arco de elipse meridiana

$k_o = 0.9996$

$\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda$

λ_o = 6 (Nº Huso - 30) - 3 = 6 (Nº Huso - 30.5)

16.1.2. Transformación de UTM a Geográficas

Cálculo de las coordenadas λ , φ, conocidas las X e Y

$\varphi = \varphi' - (VII)\, q^2 + (VIII)\, q^4 - D_6$ $\lambda = \lambda_o + (IX)\, q - (X)\, q^3 + E_s$

$$(VIII) = \frac{tg\,\varphi'}{2N'^2\, sen\, 1''}\,(1 + \eta'^2)\,\frac{1}{k_0^2}\,10^{12}$$

$$(VIII) = \frac{tg\,\varphi'}{24N'^4\, sen\, 1''}\,(5 + 3\, tg^2\, \varphi' + 6\, \eta'^2 - 6\, tg^2\, \varphi'\, \eta'^2 - 3\, \eta'^4 - 9\, tg^2\, \varphi'\eta'^4)\,\frac{1}{k_o^4}\,10^{24}$$

$$(IX) = \frac{1}{N' \cos\varphi'\, sen\, 1''}\,\frac{1}{k_o}\,10^6$$

$$(X) = \frac{1}{6N'^3 \cos\varphi'\, sen\, 1''}\,(1 + 2\, tg^2\, \varphi' + \eta'^2)\,\frac{1}{k_o^3}\,10^{18}$$

$$D_6 = \frac{tg\,\varphi''}{720N'^6\, sen\, 1''}\, q^6\,(61 + 90\, tg^2\, \varphi' + 45\, tg^4\, \varphi' + 107\, \eta'^2 - 162\, tg^2\, \varphi'\eta'^2 - 45\, tg^4\, \varphi'\eta'^2)\,\frac{1}{k_o^6}\,10^{36}$$

$$E_5 = \frac{1}{120N'^5 \cos\varphi'\, sen\, 1''}\, q^5\,(5 + 28\, tg^2\, \varphi' + 24\, tg^4\, \varphi' + 6\eta'^2 + 8\, tg^2\, \varphi'\eta'^2)\,\frac{1}{k_o^5}\,10^{30}$$

$$\lambda_o = \left[\left(\frac{\lambda}{6}\right)_{parte_entera}\right] 6 \pm 3 \qquad + \text{ si } X > 0 \;\; - \text{ si } X < 0$$

λ_o = longitud del meridiano central del huso respecto a Greenwich

Elipsoide internacional de Hayford:

c = 6.399.936,609 m

$e'^2 = 0,0067681703 \approx \frac{593}{296^2}$

a = 6.378.388 m

16.2. CONVERGENCIA DE MERIDIANOS

Los ángulos medidos en el elipsoide están referidos al norte geográfico cuya representación en la proyección es una línea curva, transformada del meridiano que pasa por dicho vértice en el elipsoide, y cuya concavidad en la proyección es hacia el meridiano central. Ya que la cuadrícula U.T.M. da siempre rectas paralelas como norte de cuadrícula y los ángulos en la proyección hay que referirlos a ese norte, en cada punto habrá que considerar el ángulo que forma la transformada del meridiano con la dirección del norte U.T.M., que es la convergencia de meridianos.

Convergencia de meridianos θ es el ángulo* que forma la transformada del meridiano que pasa por el vértice (con dirección al N.G.) con la dirección del norte de la cuadrícula o U.T.M. (paralela al meridiano central) en dicho punto (N.G.).

* Cuando se miden ángulos en una proyección, se refieren al de las tangentes de las líneas (curvas en general) en que se transforman las correspondientes del elipsoide.

De Geográficas a UTM

$\theta'' = (XII)\ p + (XIII)\ p^3 + C_5$

$p = 0{,}0001 + \Delta\lambda''$

$(XII) = \operatorname{sen}\varphi\ 10^4$

$(XIII) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi\ (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4)\operatorname{sen}^2 1''\ 10^{12}$

$C5 = \frac{1}{15}\operatorname{sen}\varphi\cos^4\varphi\ (2 - tg^2\varphi)\ p^5\operatorname{sen}^4 1''\ 10^{20}$

$\eta = e'\cos\varphi$

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

De UTM a Geográficas

$\theta'' = (XV)\ q - (XVI)\ q^3 + F_5$ $\qquad$ $q = 0.000001\ x$

$(XV) = \frac{tg\,\varphi'}{N'\operatorname{sen}1''}\frac{1}{k_o}\ 10^6$ $\qquad$ $(XVI) = \frac{tg\,\varphi'}{3N'^3\operatorname{sen}1''}(1 + tg^2\varphi' - \eta'^2 - 2\eta'^4)\frac{1}{k_o^3}10^{18}$

$F5 = \frac{tg\,\varphi'}{15N'^5\operatorname{sen}1''}(2 + 5\,tg^2\varphi' + 3\,tg^4\varphi')q^5\frac{1}{k_o^5}10^{30}$

$\eta' = e'\cos\varphi'$ $\qquad$ $k_o = 0.9996$

$$N' = \frac{a}{\left(1 - e^2\operatorname{sen}^2\varphi'\right)^{\frac{1}{2}}}$$

16.3. REDUCCIÓN A LA CUERDA c

Es el ángulo que forma la recta que une los dos vértices transformados en la proyección, con la tangente a la transformada de la geodésica.

Para el cálculo de la reducción a la cuerda, debemos conocer las coordenadas X , Y de los vértices.

$$C''_A = 6{,}8755 * 10^{-8}\,(XVIII)\,(Y_B - Y_A)\,(2\,x_A - x_B)$$

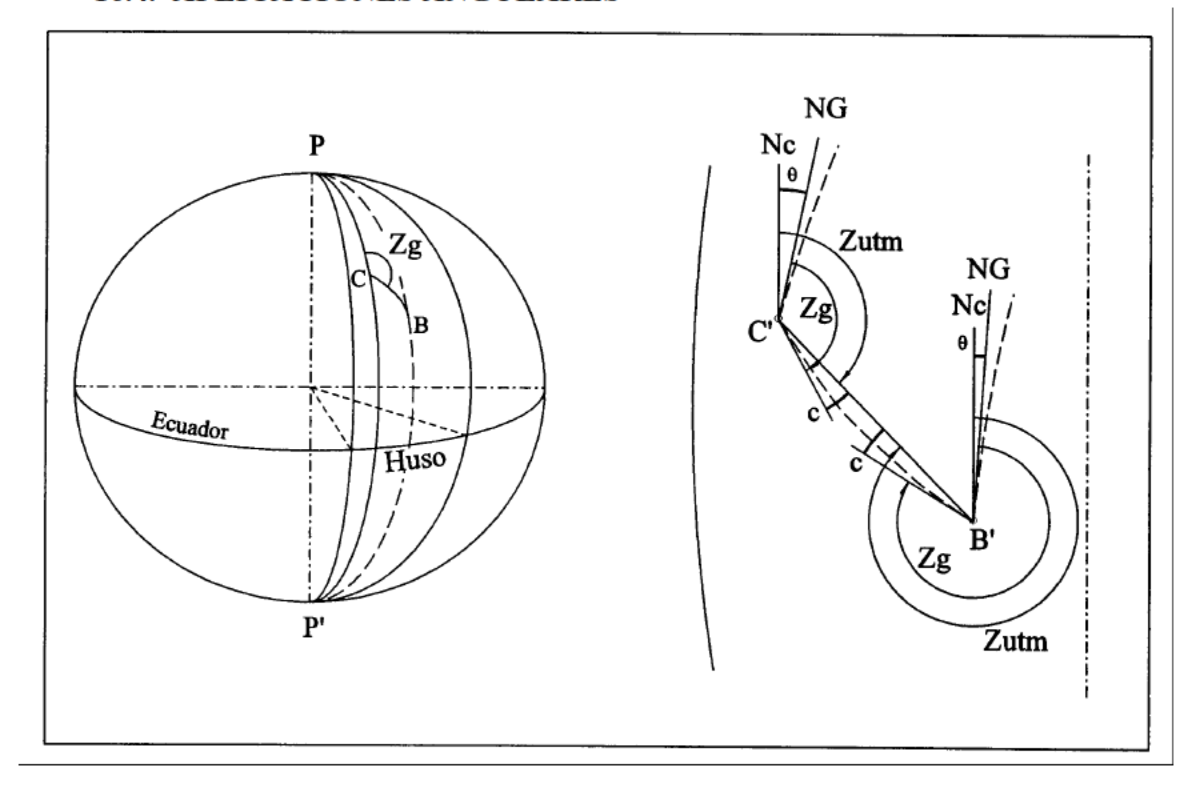
$$C''_B = 6{,}8755 * 10^{-8}\,(XVIII)\,(Y_A - Y_B)\,(2\,x_B - x_A)$$

$$x_A = X_A - 500.000$$

$$x_B = X_B - 500.000$$

$$(XVIII) = \frac{1}{2N'^2}(1+\eta'^2)\frac{1}{k_o^2}10^{12}$$

16.4. APLICACIONES ANGULARES



Acimut plano o U.T.M. obtenido a partir de las coordenadas U.T.M.

$$\operatorname{tg} Z_{UTM} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Acimut geodésico proyectado $Z_{UTM} + c$

Acimut geodésico, que es igual que en el elipsoide $Z_G = Z_{UTM} \pm \theta \pm c$

Convergencia de meridianos $= \theta$ Reducción a la cuerda $= c$

16.5. FACTOR DE ESCALA k

Es necesario aplicar las reducciones a las distancias medidas en campo con distanciómetros, para poderlas utilizar en la proyección U.T.M., o a la inversa.

Problema directo

$$Distancia_{\text{U.T.M.}} = k \times \text{Distancia}_{\text{ELIPSOIDE}}$$

A las distancias geométricas obtenidas en campo (a las que suponemos corregidas de factores meteorológicos), hemos de aplicar las correcciones oportunas para su paso al elipsoide (reducción del ángulo de pendiente al terreno, reducción al horizonte, reducción al nivel del mar, paso de la cuerda al arco). Una vez obtenidas estas distancias es preciso aplicar una última corrección para su reducción a la proyección U.T.M A esta corrección se le denomina ***factor de escala.***

La distancia que utilizamos en la proyección será la que teníamos en el elipsoide, multiplicada por el factor k.

$$\text{Distancia U.T.M.} = k \times \text{Distancia}_{\text{ELIPSOIDE}}$$

- En distancias menores de 100 km.:

<u>k en función de las geodésicas</u>

$$k = k_o \{1 + (XX)\, p^2\}$$

$$p = 0.0001 \ \ \Delta\lambda''$$

$$k_o = 0,9996$$

$$(XX) = \tfrac{1}{2} \cos^2 \varphi \, (1 + \eta^2) \, \text{sen}^2 1'' \ 10^8$$

$$\eta = e' \cos \varphi$$

<u>k en función de las U.T.M.</u>

$$k = k_o \{1 + (XVIII)\, q^2 + 0.00003\, q^4\}$$

$$q = 0,000001\, x$$

$$(XVIII) = \frac{1}{2N'^2}(1+\eta'^2)\frac{1}{k_o^2}10^{12}$$

$$x = X - 500.000$$

- En distancias mayores de 100 km.:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} + \frac{4}{k_M}\right]$$

k_A, k_B factores de escala correspondientes a los extremos del lado

k_M “ “ “ “ “ su punto medio

Problema inverso

Se resuelve con las mismas fórmulas

$$\text{Distancia}_{\text{ELIPSOIDE}} = \frac{Distancia_{UTM}}{k}$$

$k = k_o \{1 + (XX)\, p^2\}$ $\qquad$ $k = k_o \{1 + (XVIII)\, q^2 + 0.00003\, q^4\}$

Resumen de las características de la proyección U.T.M.

Proyección:
Universal Transversa Mercator (U.T.M.). Husos de 6º de amplitud

Sistema de referencia geodésico φ, $\Delta\lambda$
Origen de longitudes: Meridiano central de cada huso
Origen de latitudes: Ecuador

Sistema de referencia plana X, Y
Eje de coordenadas: Transformada recta del meridiano central del huso
Eje de abscisas: Transformada recta del Ecuador

Sistema de referencia plano convencional X, Y
Obtenido por traslación del sistema anterior, dando al origen del mismo las coordenadas:
X = 500.000 metros
Y = 0 metros

Factor de reducción de escala
$K_0 = 0{,}9996$

Numeración de los husos:
Del 1 al 60 a partir del antimeridiano de Greenwich y hacia el Este

Superficie de referencia:
Elipsoide internacional de Hayford, con parámetros fundamentales:

semieje mayor $a = 6.378.388$ m
aplastamiento $\alpha = \dfrac{1}{297} = 0{,}003367$

17. LA CUADRÍCULA UTM.

El sistema de referencia más universal de puntos sobre la Tierra es el geográfico:

Latitud: el origen es el Ecuador terrestre, latitud positiva hacia el norte y negativa hacia el sur.

longitud el origen es el meridiano de Greenwich, longitud positiva hacia el este y negativa hacia el oeste.

El sistema geográfico es el más adecuado a las aplicaciones geográficas, pero es un poco complicado para usos técnicos. Por esto se prefieren los sistemas de referencia rectangulares.

En las aplicaciones técnicas de la proyección U.T.M. (levantamientos topográficos, construcción de mapas,…) son las coordenadas rectangulares X, Y las utilizadas en su correspondiente huso.

Sin embargo, para su empleo en los mapas, se ha establecido un sistema universal de designación de puntos, compuesto de letras y cifras, que es la CUTM (Cuadrícula U.T.M.) que nos permite la identificación de un punto con la aproximación deseable, utilizando en cada caso el mínimo necesario, suficiente y posible de datos y omitiendo los superfluos.

Los pilares básicos de esta CUTM son:

- Los **60 husos** de **6º** de amplitud, numerados del 1 al 60 a partir del meridiano 180º de longitud Greenwich, en el sentido Oeste - Este.

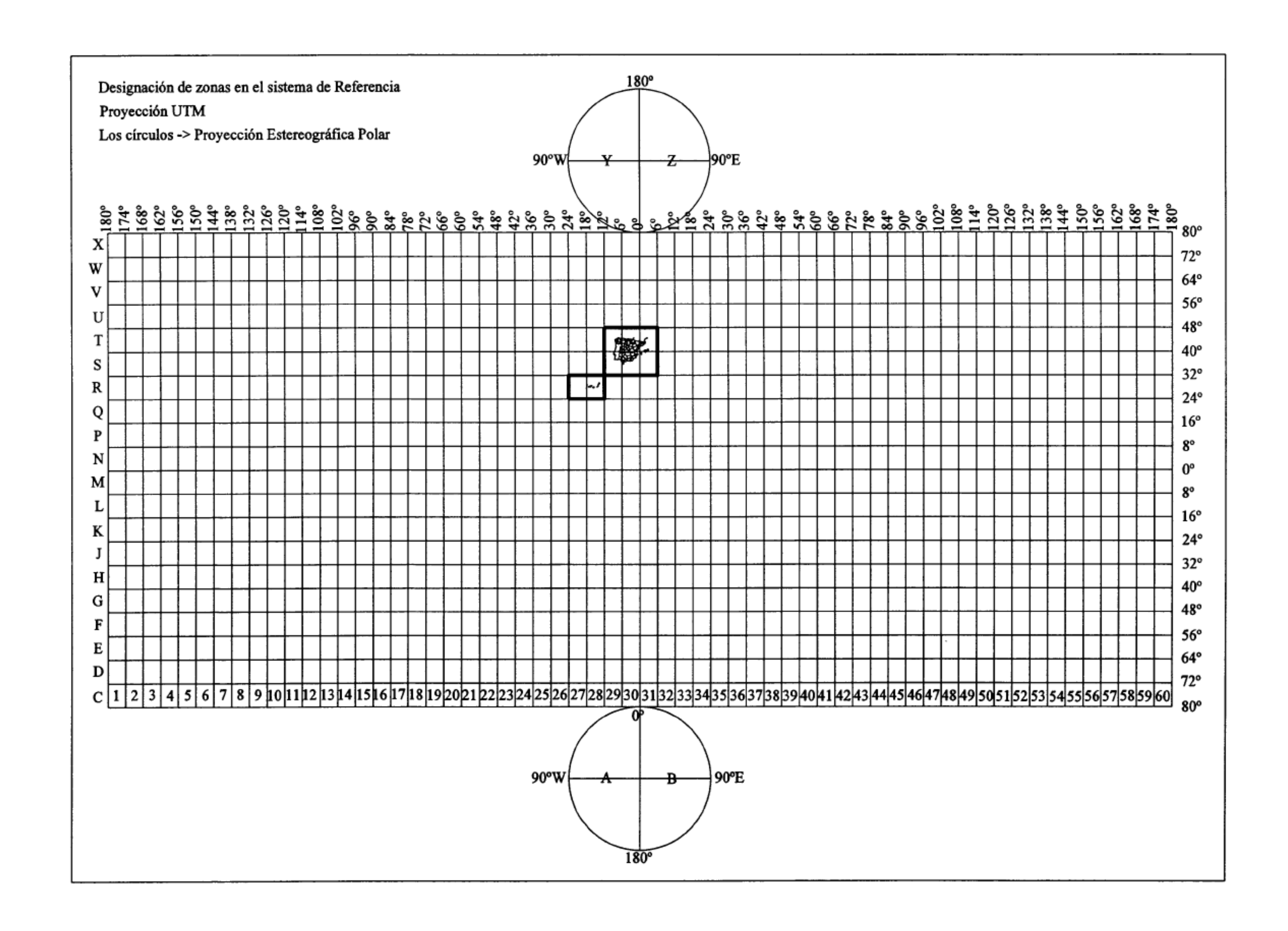
- **20 bandas** esféricas de **8º de latitud** entre los paralelos - 80º/+80º, que se alfabetizan con letras mayúsculas, de sur a norte, desde la C hasta la X incluidas (excluyendo las CH, I, LL, Ñ y O)

De la intersección de los husos con las bandas resultan 60 * 20 = 1.200 trapecios esferóidicos de 6º de longitud por 8º de latitud, que reciben el nombre de ***zonas*** y se designan cada una de ellas por el número del huso seguido por la letra de la banda, no habiendo repeticiones. Esta es la cuadrícula básica.

España está en las zonas:

27R y 28R, para las Islas Canarias
29S y 29T
30S y 30T,
31S y 31T

[ver gráfico en página siguiente]


Designación de zonas en el sistema de Referencia
Proyección UTM
Los círculos -> Proyección Estereográfica Polar
180°
90°W
Y
Z
90°E
180° 174° 168° 162° 156° 150° 144° 138° 132° 126° 120° 114° 108° 102° 96° 90° 84° 78° 72° 66° 60° 54° 48° 42° 36° 30° 24° 18° 12° 6° 0° 6° 12° 18° 24° 30° 36° 42° 48° 54° 60° 66° 72° 78° 84° 90° 96° 102° 108° 114° 120° 126° 132° 138° 144° 150° 156° 162° 168° 174° 180°
X W V U T S R Q P N M L K J H G F E D C
80° 72° 64° 56° 48° 40° 32° 24° 16° 8° 0° 8° 16° 24° 32° 40° 48° 56° 64° 72° 80°
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
0°
90°W
A
B
90°E
180°

Hasta aquí la CUTM está definida por meridianos y paralelos, que son líneas geográficas. En adelante las subdivisiones se establecen, dentro de cada huso por rectas paralelas a los ejes coordenados, de la siguiente forma:

* **Se divide cada huso en cuadrados de 100 Km**. de lado, a partir del Ecuador (eje de las X), hacia el Norte y el Sur, y a partir del meridiano central (eje de las Y) hacia el Este y el Oeste.. Cada cuadrado se designa por una pareja de letras combinadas de manera que dentro de un área de 18º de longitud por otros 17º de latitud no se repite la denominación de un cuadrado.

∗ Las columnas de cuadrados se rotulan sobre el Ecuador de Oeste a Este, a partir del meridiano de 180º, con dos letras mayúsculas desde la A hasta la Z (excluidas las CH, I, LL, Ñ y O), contando con 24 letras. Como el arco del Ecuador de 6º de longitud tiene un desarrollo de unos 668 Km., cada huso comprende en el Ecuador seis cuadrados completos (de 100 Kms) y otros dos cuadrados parciales, por lo que se necesitan ocho letras, de modo que dichas 24 letras se repiten exactamente cada tres husos, es decir, cada 18º de longitud.

Los cuadrados laterales incompletos de cada huso se van estrechando a medida que aumenta la latitud.

∗ Las filas de cuadrados se rotulan con mayúsculas con 20 letras, desde la A hasta la V (excluidas las CH, I, LL, Ñ y O). En los husos impares la letra A rotula los cuadrados junto al Ecuador, mientras que en los pares, los cuadrados se rotulan con la F.

De esta forma resulta que dos filas de cuadrados con la misma letra dentro de un mismo huso están separadas por 19 * 100 Km. desarrollo aproximado de 17º del arco de meridiano, de modo que la designación completa de un cuadrado se repite cada 17º de latitud. Por tanto, dos cuadrados con la misma designación no se encuentran dentro de un área de 17º de latitud por 18º de longitud.

La designación de un cuadrado se expresa por la letra de la columna seguido por la letra de la fila. Si puede haber ambigüedad en la designación, se antepone la sigla de la zona, por ejemplo 30TWM es único en toda la Tierra.

La identificación completa de un punto cualquiera en la CUTM constará de:

- la designación de la zona y el cuadrado de los 100 km.
- las coordenadas numéricas del punto, en las que se prescindirá de las cifras que representen las centenas de kilómetros, por estar contenidas implícitamente en la sigla del cuadrado de los 100 kms.

Por ejemplo, un punto comprendido en el huso 30 que tiene de coordenadas UTM aproximadas al metro de:

X = 4**68.367** Y = 4.**582.717**

Este punto está en la zona 30T y en el cuadrado VL, la designación del cuadrado de 100 Km será 30TVL.

Todos los puntos del huso 30 cuya X comience por 4 y cuya Y comience por las cifras 45, estarán contenidos en dicho cuadrado, por lo que no será necesario citar estas cifras para identificar el punto dado, cuya referencia completa será, aproximada al metro:

30 T V L 6836782717 (aproximación de 1 metro)

Las cifras de la abscisa y de la ordenada se escriben sin separación entre unas y otras después de las letras del cuadrado. Estas cifras son siempre en número par, en el ejemplo diez cifras. Las cinco primeras corresponden a la abscisa y las cinco últimas a la ordenada del punto dentro del cuadrado de los 100 Km. Es decir, que dicho punto, en el sistema rectangular de referencia 30 TVL, tiene por coordenadas:

X = 68367 Y = 82717 metros

De los dos grupos de cifras, la primera de la izquierda de cada grupo representa siempre, y sin excepción, decenas de kilómetros, las siguientes, unidades de kilómetros, y así sucesivamente.

Teniendo en cuenta este criterio, cuando no sea necesario o posible aproximar las coordenadas al metro, se prescindirá de las cifras que representan al metro de la abscisa y la ordenada:

30 T V L 68368271 (aproximación de 10 metros)
30 T V L 683827 (aproximación de 100 metros)
30 T V L 6882 (aproximación de 1 Kilómetro)

Primera letra del cuadrado de 100 km

Huso	Centenas de Km de la abscisa							
	1	2	3	4	5	6	7	8 9
3 + 1	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
3 + 2	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**P**	**Q**	**R**
3	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**

Segunda letra del cuadrado de 100 km.

Huso (paridad)	Millares de Km de la ordenada (paridad)	Centenas de Kms de la ordenada 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
2 + 1		**A B C D E F G H J K**
2	**2**	**F G H J K L M N P Q**
2 + 1		**L M N P Q R S T U V**
2	**2 + 1**	**R S T U V A B C D E**

18. OTRAS PROYECCIONES

Proyección poliédrica, utilizada en el Mapa Topográfico Nacional hasta hace poco tiempo.

Proyección Bonne, utilizado en el Mapa Militar Itinerario 1:200.000. Es equivalente.

Proyección sinusoidal, es equivalente.

Proyección Mollweide

Proyección Goode, para representar la totalidad de la Tierra, sin excesivas deformaciones.

19. SISTEMAS GEODÉSICOS UTILIZADOS EN ESPAÑA.

Hasta el año 1968 se utilizó en España el sistema geodésico o geográfico español, basado en las siguientes referencias terrestres:

Punto fundamental o datum	*Observatorio de Madrid*
Origen de longitudes	*Meridiano de Madrid*
Origen de latitudes	*Ecuador*
Superficie de referencia	*Elipsoide de Struve*

Sobre esta superficie y con estos parámetros se llevó a cabo el cálculo y compensación, por zonas, de la red geodésica española, cuyos valores han servido de base y apoyo en todos los trabajos destinados a la confección de la Cartografía nacional. A las coordenadas en este sistema se les denomina *españolas o antiguas*.

Al finalizar la II Guerra Mundial se unifican las redes geodésicas europeas y se compensan en conjunto. Este trabajo se efectuó sobre los siguientes parámetros:

Punto fundamental o datum	*Observatorio de Potsdam*
Origen de longitudes	*Meridiano de Greenwich*
Origen de latitudes	*Ecuador*
Superficie de referencia	*Elipsoide internacional de Hayford*

Desde 1968, aproximadamente, se dispone de coordenadas de todos los vértices de la red geodésica. Desde entonces, todos los trabajos y la nueva cartografía se apoyan en estos nuevos valores de latitud y longitud. A las coordenadas en este sistema se les llama europeas o actuales.

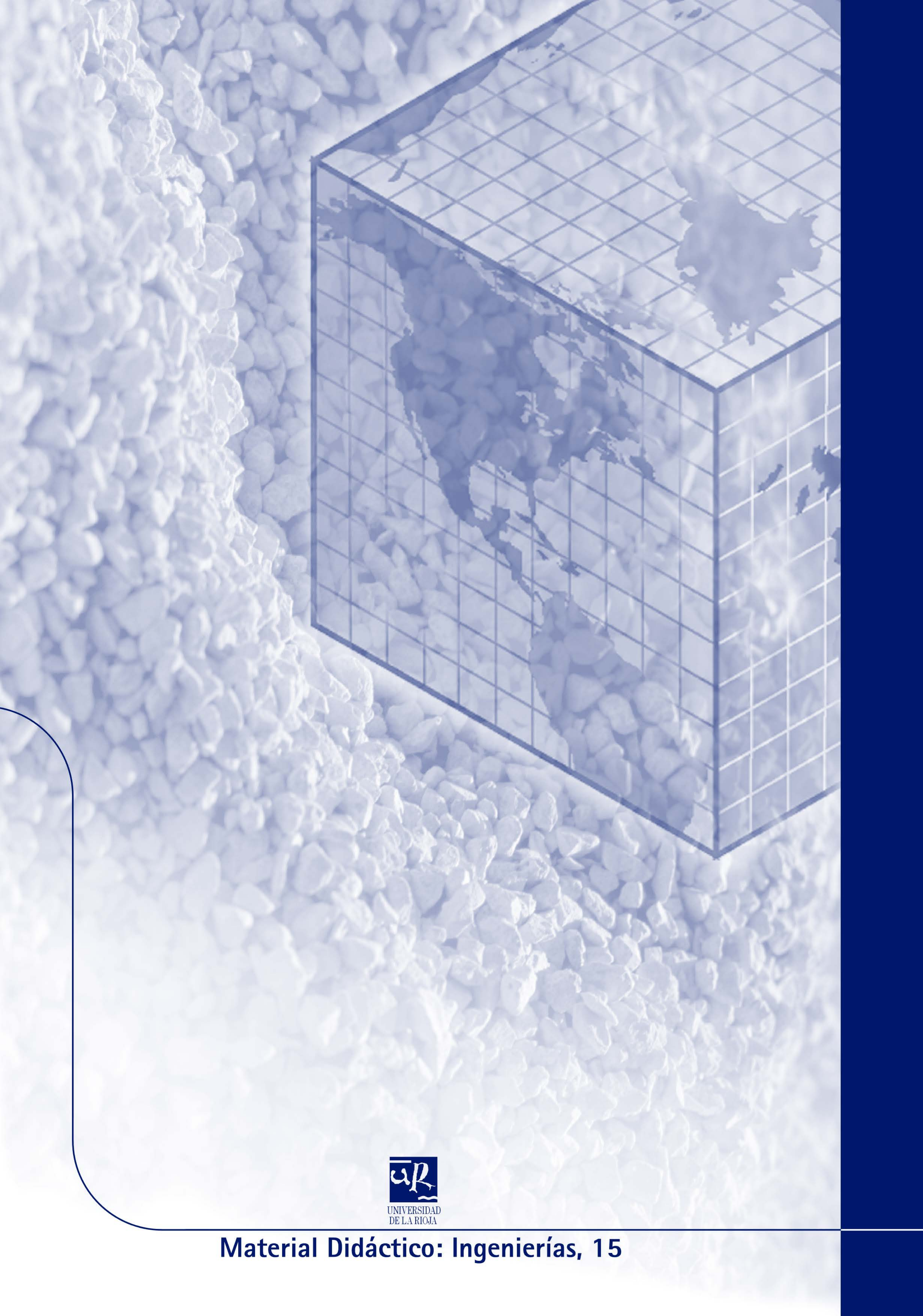
El sistema español o antiguo sirvió para calcular, mediante fórmulas de transformación, las coordenadas rectangulares en proyección conforme de Lambert.

El sistema europeo o actual sirve para calcular las coordenadas rectangulares UTM.

INDICE

CAPÍTULO I. LA CARTOGRAFÍA

CAPÍTULO II. LAS PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS



Material Didáctico: Ingenierías, 15